Devoir surveillé: Probabilité

Exercice 1:

1. Calculons $P(X = 10)$. L'évènement $\{X = 10\}$ correspond aux vieux téléphones. On sait qu'il ramasse 20% de vieux téléphones donc

$$P(X = 10) = \frac{20}{100} = 0.2$$

Le loi de probabilité de X

x_i	10	40	70	150	200
$P(X = x_i)$	0.2	0.1	0.15	0.5	0.05

2. Espérance de X.

$$\begin{aligned} E[X] &= x_1 \times n_1 + x_2 \times n_2 + ... + x_p \times n_p \\ &= 10 \times 0.20 + 40 \times 0.10 + 70 \times 0.15 + 150 \times 0.50 + 200 \times 0.05 \\ &= 101.5 \end{aligned}$$

On peut donc dire qu'il peut espérer vendre en moyenne 124.09 € chaque téléphone.

3. S'il confisque 10 téléphones par jour, au bout d'une semaine (5 jours travaillés) il aura confisqué 50 téléphones. Or on a vu dans la question précédente qu'il vendait en moyenne un téléphone à 101.5€,il gagne donc par semaine

$$50 \times E[X] = 50 \times 101.5 = 5075$$

Exercice 2: (11 points)
On place dans une urne 3 boules bleues, 5 boules vertes et 2 boules jaunes.

1. **Premier jeu :** La partie coûte 5€. On tire une boule que l'on replace ensuite dans l'urne. Une boule bleue rapporte 1 €, une boule verte rapporte 2 € et une boule jaune rapporte 6 €. On note X les gains à ce jeu.
   (a) Comme la partie coûte 5€, X peut prendre les valeurs : -4, -3, 1. Il y a en tout 10 boules qui ont toute la même chance d'être tirée. Donc l'expérience est équiprobable. On a donc

$$\begin{aligned} P(X = -4) = P(\text{Tirer une boule bleue}) &= \frac{3}{10} = 0.3 \\ P(X = -3) = P(\text{Tirer une boule verte}) &= \frac{5}{10} = 0.5 \\ P(X = 1) = P(\text{Tirer une boule jaune}) &= \frac{2}{10} = 0.2 \end{aligned}$$

   On en déduit la loi de probabilité de X :

x_i	-4	-2	1
$P(X = x_i)$	0.3	0.5	0.2

   (b) Pour savoir si l'on a ou non intérêt à jouer à ce jeu, il faut calculer l'espérance de X.

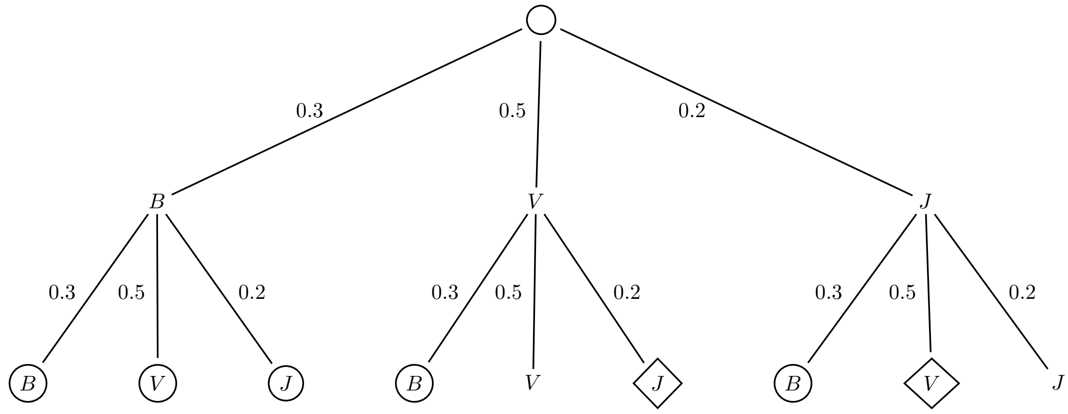
$$\begin{aligned} E[X] &= x_1 \times n_1 + x_2 \times n_2 + ... + x_p \times n_p \\ &= -4 \times 0.30 + -3 \times 0.50 + 1 \times 0.20 \\ &= -2.50 \end{aligned}$$

   On remarque que l'espérance est négative donc en moyenne, on perd de l'argent à chaque partie. Nous n'avons donc pas intérêt à jouer à ce jeu.

2. **Deuxième jeu :** La partie coûte 5€. On tire successivement 2 boules en les replaçant à chaque fois dans l'urne. Et chaque boule rapporte autant que dans le jeu précédent.

   (a) Comme on replace la boule dans l'urne, les deux tirages sont identiques et indépendants. On est donc dans la situation où un arbre pondéré est adapté pour modéliser ce jeu.

   (b) Arbre modélisant ce jeu



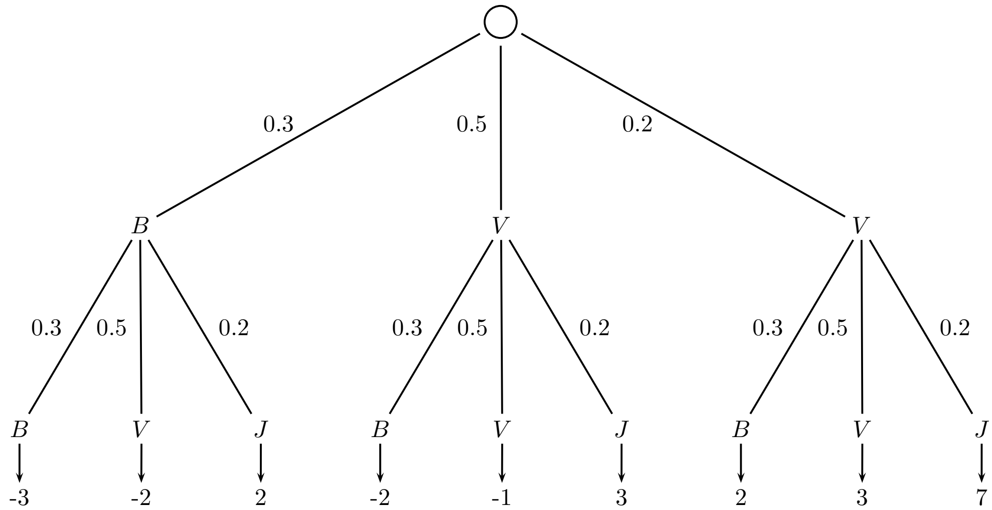
   (c) On a entouré sur l'arbre les issues avec au moins une boule bleue. La probabilité des feuille est égale au produit des probabilités des branches. On a alors

$$P(\text{Boule bleue}) = 0.3 \times 0.3 \ + \ 0.3 \times 0.5 \ + \ 0.3 \times 0.2 \ + \ 0.5 \times O.3 \ + \ 0.2 \times 0.3 = 0.51$$

   (d) On a entouré d'un losange les issues avec un boule jaune et une boule verte. On a alors

$$P(\text{Jaune et vert}) = 0.5 \times 0.2 \ + \ 0.2 \times 0.5 = 0.2$$

   (e) On note Y les gains à ce jeu. On refait l'arbre en indiquant les gains dans chaque cas :



   On en déduit la loi de probabilité de Y :

x_i	-3	-2	-1	2	3	7
$P(X = x_i)$	0.09	0.3	0.25	0.12	0.2	0.04

   (f) Pour savoir si le jeu est équitable, on calcul l'espérance

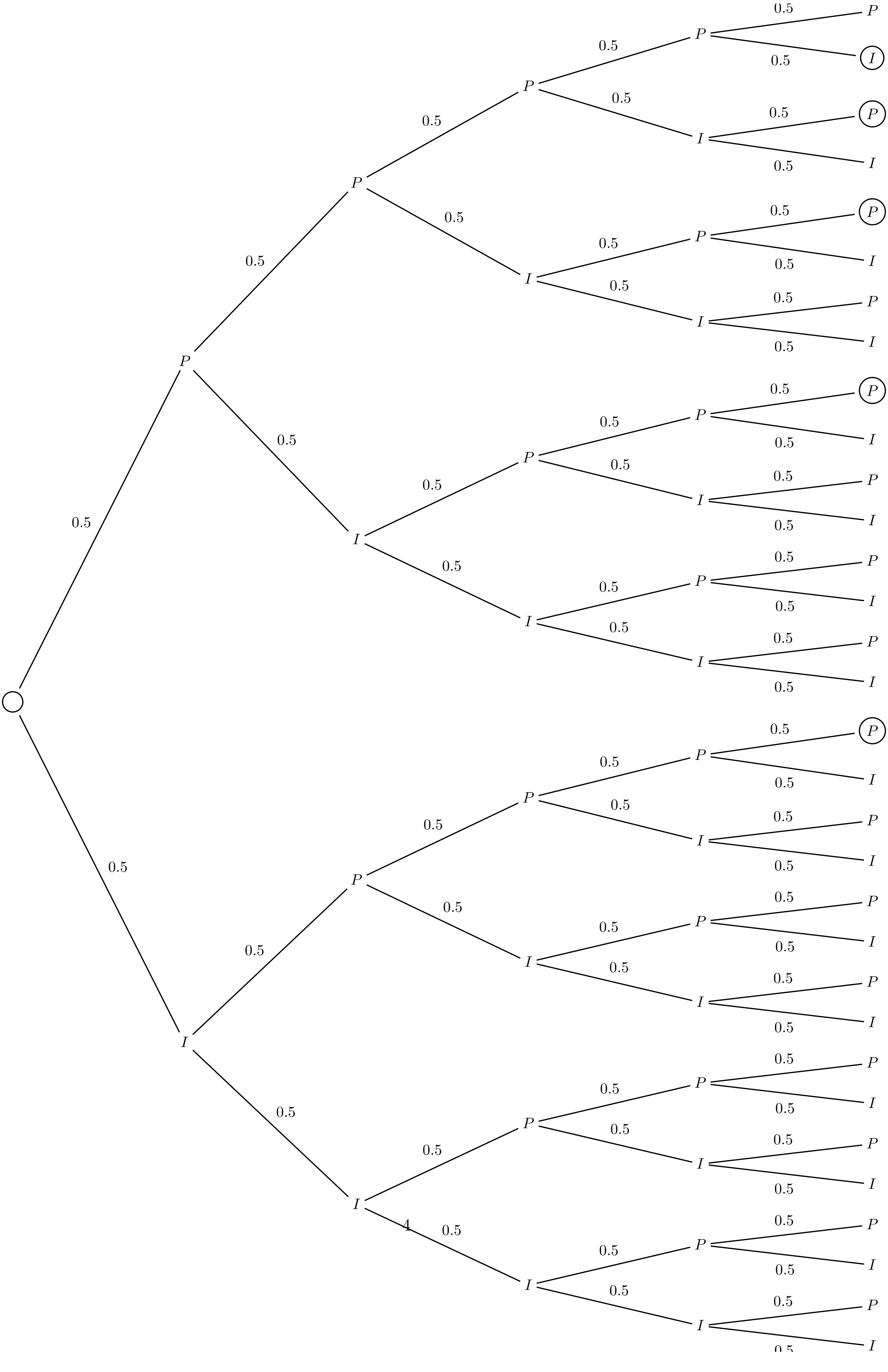
$$\begin{aligned} E[X] &= x_1 \times n_1 + x_2 \times n_2 + ... + x_p \times n_p \\ &= -3 \times 0.09 + -2 \times 0.30 + -1 \times 0.25 + 2 \times 0.12 + 3 \times 0.20 + 7 \times 0.04 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Comme l'espérance est nulle, donc le jeu est équitable.

Exercice 3: (4 points)
Comme les dés sont équilibrés on a :

$$P(\text{Nombre pair}) = \frac{3}{6} = 0.5$$
$$P(\text{Nombre impair}) = \frac{3}{6} = 0.5$$

Comme chaque lancer est indépendant des autres, on peut faire un arbre pondéré suivant et la probabilité des feuilles sera égale au produit des probabilités des branches. On note P quand le résultat est paire et I quand il est impaire.



Les feuilles entourées sont celles qui nous interressent. Chacune de ces branches a pour probabilité

$$P(\text{Une branche avec 4 paires}) = 0.5 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5 = 0.03125$$

On compte 5 branches de ce type donc finalement

$$P(\text{Avoir 4 pairs}) = 5 \times 0.03125 = 0.15625$$