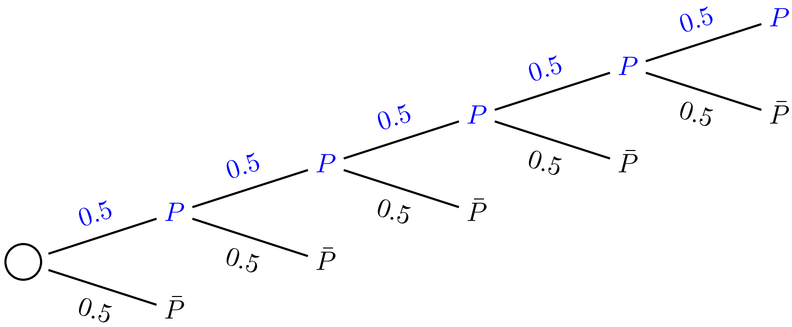
Devoir Maison: Probabilité - Correction

Exercice 1: (63 p 282)
L'expérience consiste à lancer 5 fois de suite un dé équilibré. Cette expérience correspond à la répétition de 5 expériences identiques et indépendantes. Nous allons donc pouvoir faire un arbre pondéré.

Lors de chaque "petite" expérience, on s'intéresse à l'évènement $P = \{\text{le chiffre est paire}\}$ et à son évènement contraire $\bar{P} = \{\text{le chiffre est impaire}\}$. Comme le dé est équilibré, les résultats sont équiprobables donc à chaque lancer on a

$$P(P) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(\bar{P}) = \frac{1}{2}$$

On obtient alors l'arbre suivant.

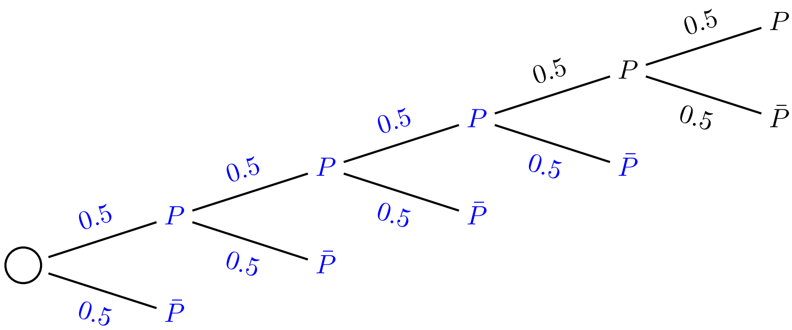


Donc la probabilité d'obtenir que des nombres paires est de

$$P(PPPPP) = 0.5 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5 = 0.03125$$

Exercice 2: (92 p 289)
Ce n'est pas dit dans l'énoncé mais comme on ne nous donne aucune information sur l'équilibrage de la pièce, on peut supposer qu'elle est équilibrée. Et donc qu'à chaque lancer, les évènements $P = \{\text{pile}\}$ et $\bar{P} = \{\text{face}\}$ sont équiprobables.

Le fait de répéter cette expérience jusqu'à obtenir un pile, permet de dire que l'on fait au plus 5 expériences identiques et indépendantes. Nous pouvons donc faire l'arbre de probabilité suivant.



La probabilité de lancer moins de 5 fois la pièce correspond à la somme des probabilité des feuilles en bleu, ce qui donne

$$\begin{aligned} P(\text{lancer la pièce moins de 5 fois}) &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} \\ &= \frac{15}{16} \end{aligned}$$

Exercice 3: (79 p 286)

1. Loi de probabilité de X

Défauts	0	A	B	A et B
x_i	950	1050	1100	1200
$P(X = x_i)$	0.9	0.04	0.02	0.04

2. Espérance de X :

$$\begin{aligned} E[X] &= p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \\ &= 0.9\times 950 + 0.04\times 1050 + 0.02\times 1100 + 0.04\times 0.04 \\ &= 967 \end{aligned}$$

Donc $E[X]$ est de 967 €. Cette valeur correspond au coût moyen de production d'un objet.
Variance de X :

$$\begin{aligned} V(X) &= p_1\left(x_1 - E[X]\right)^2 + p_2\left(x_2 - E[X]\right)^2 + \cdots + p_n\left(x_n - E[X]\right)^2 \\ &= 0.9(950-967)^2 + 0.04(1050-967)^2 + 0.02(1100-967)^2 + 0.04(1200-967)^2 \\ &= 3061 \end{aligned}$$

Écart-type de X :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{3061} = 55$$

3. a. D'après la valeur de $E[X]$, l'usine peut "espérer" que chaque objet lui coûte 967 €. Donc en les vendant à 960 €elle ne peut pas réaliser de bénéfices.
   b. Si elle veut un bénéfice moyen de 100 €, il faut qu'elle les objets 100 €plus cher que l'espérance de coût soit 1060 €.

Exercice 4: (84 p 286)

1. B est la variable aléatoire comptant le nombre d'ordinateurs loués. Comme cette société ne dispose que de 5 ordinateurs, si on lui en demande 5, 6 ou 7, elle ne pourra en louer que 5. On en déduit donc la loi de probabilité de B.

Ordinateurs loués	0	1	2	3	4	5
Bénéfices	-250	-160	-70	20	110	200
probabilité	0.05	0.1	0.1	0.15	0.25	0.35

2. Espérance de B :

$$\begin{aligned} E[B] &= p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \\ &= 0.05\times(-250) + 0.1\times(-160) + 0.2\times(-70) + 0.15\times 20 + 0.25\times 110 + 0.35\times 200 \\ &= 65 \end{aligned}$$

La société peut donc espérer gagner 65 €par jour.

3. On en déduit l'espérance des bénéfices sur une année

$$E[365\times B] = 365\times E[B] = 23725$$

La société peut donc espérer gagner 23 725 €par an.