Devoir surveillé: Suites

Exercice 1:

45 p 122

1. Programme permettant de calculer les termes de la suite u :
   - En langage humain
     ```
     Saisir A
     Saisir N
     Pour I variant de 1 à N faire
     mettre dans A la valeur 2xA + 5
     fin de faire
     afficher A
     ```
   - En Texas
     ```
     Prompt A
     Prompt N
     For(I,1,N)
     2*A+5->A
     End
     Disp A
     ```
   - En Casio
     ```
     ? -> A
     ? -> N
     For 1 -> I to N
     2*A + 5 -> 1
     Next
     A
     ```
2. On calcul alors le terme d'indice 11 de u pour $u_0 = 1$ soit $u_11 = 12283$.

Exercice 2:

83p125

1. On calcul les premiers termes des suites u et v

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{u_0}{2u_0+1} = \frac{6}{2\times 6+1} = \frac{6}{13} \\
u_2 &= \frac{u_1}{2u_1+1} = \frac{\frac{6}{13}}{2\times\frac{6}{13}+1} = \frac{6}{25} \\
u_3 &= \frac{u_3}{2u_3+1} = \frac{\frac{6}{25}}{2\times\frac{6}{25}+1} = \frac{6}{37} \\
v_0 &= \frac{1}{u_0} = \frac{1}{6} \quad \text{Non demandé mais on en aura besoin plus tard} \\
v_1 &= \frac{1}{u_1} = \frac{13}{6} \\
v_2 &= \frac{1}{u_3} = \frac{25}{6} \\
v_3 &= \frac{1}{u_3} = \frac{37}{6}
\end{aligned}
$$

2. Démontrons que la suite v est arithmétique. Pour cela, il faut calculer

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{1}{\frac{u_n}{2u_n+1}} - \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{2u_n+1}{u_n} - \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{2u_n+1-1}{u_n} \\ &= \frac{2u_n}{u_n} \\ &= 2 \end{aligned}$$

On a donc $v_{n+1} = v_n + 2$ donc la suite est arithmétique de raison 2 et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{6}$.

3. Comme v est une suite est arithmétique de raison 2 et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{6}$ on en déduit son expression explicite

$$v_n = u_0 + n \times r = \frac{1}{6} + 2n$$

On en déduit l'expression de u

$$u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{2n + \frac{1}{6}}$$

Exercice 3:

109p126

1. Population en centre ville et en banlieue en 2011

$$\begin{aligned} b_1 &= 30000(1 + \frac{7}{100}) = 32100 \\ c_1 &= 30000(1 - \frac{4}{100}) = 28800 \end{aligned}$$

Population en centre ville et en banlieue en 2012

$$\begin{aligned} b_2 &= 32100(1 + \frac{7}{100}) = 34347 \\ c_2 &= 28800(1 - \frac{4}{100}) = 27648 \end{aligned}$$

2. On remarque que chaque année, on gagne ou on perd un certain pourcentage de la population. Cette situation est donc modélisable par une suite géométrique.
Pour la population de banlieue, on gagne 7% chaque année donc b est une suite géométrique de raison $(1 + \dfrac{7}{100} = 1.07$. On en déduit la relation de récurrence suivante

$$b_{n+1} = 1.07 \times b_n$$

Pour la population de centre ville, on perd 4% chaque année donc c est une suite géométrique de raison $(1 - \dfrac{4}{100} = 0.96$. On en déduit la relation de récurrence suivante

$$c_{n+1} = 0.96 \times c_n$$

3. Dans les deux cas la population initiale est de 30000 habitants. On a donc $b_0 = c_0 = 30000$. On en déduit les expressions explicites de b et c

$$\begin{aligned} b_n &= 30000 \times 1.07^n \\ c_n &= 30000 \times 0.96^n \end{aligned}$$