Correction du 162p186

A. 1. Comme A et M sont sur le cercle Γ de centre O, $AO = OM$ donc le triangle AOM est isocèle en O. De même MOB est isocèle en O. On en déduit que

$$(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO})$$
$$(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BO})$$

2. a. Comme la somme des angles d'un triangle vaut π. Dans le triangle AOM, on a

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO}) &= \pi + k \times 2\pi \\
(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA}) &= \pi + k \times 2\pi \\
2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) &= \pi + k \times 2\pi \\
2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) &= \pi + k \times 2\pi
\end{aligned}$$

b. De même dans le triangle MOB on a

$$2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = \pi + k \times 2\pi$$

c. Utilisons la relation de Chasles avec les angles pour démontrer l'égalité.

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) &= (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}) \\
&\quad \text{On remplace en utilisant les égalités d'avant} \\
&= -2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA}) + \pi + k_1 \times 2\pi + 2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) - \pi + k_2 \times 2\pi \\
&= 2\left((\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB})\right) + (k_1 + k_2) \times 2\pi \\
\text{Par la relation de Chasles} &= 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + k \times 2\pi
\end{aligned}$$

On a donc

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + k \times 2\pi$$

3. Soit N un autre point du cercle Γ distinct de A et B. Par les questions précédentes on a aussi

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) + k \times 2\pi$$

Donc on en déduit que

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 2(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) + k \times 2\pi$$

B. 1. Montrons que C, Q, R et M sont cocycliques c'est à dire qu'ils sont sur un même cercle.

Comme Q est le projeté de M sur (AC), le triangle MQC est rectangle en Q donc Q est sur le cercle de diamètre $[CM]$. De même, R est le projeté de M sur (CB) donc R est sur le cercle de diamètre $[CM]$. Or il n'y a qu'un seul cercle de diamètre $[CM]$, donc C, Q, R et M sont sur un même cercle.

On se retrouve dans la configuration de la partie A. avec Γ le cercle de de diamètre $[CM]$ et C, Q, R et M 4 points de ce cercle. On en déduit donc que

$$2(\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RQ}) = 2(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CQ}) + k \times 2\pi$$

2. De la même façon que dans la question précédente, on a que les 4 points sont cocycliques et donc on a la relation suivante

$$2(\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RP}) = 2(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}) + k \times 2\pi$$

3. Par construction, A, B, C et M sont sur le cercle $\mathcal{C}$ donc on en déduit par A. la relation suivante

$$2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 2(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CM}) + k \times 2\pi$$

4. Calculons $(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ})$.

$$\begin{array}{rcl}
(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}) & = & (\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RM}) + (\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RQ}) \\
\text{Par les questions précedentes} & = & -(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}) + (\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CQ}) + k\pi \\
\text{Par la relation de Chasles} & = & -(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}) \\
 & & (\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CQ}) + k\pi \\
\text{Or } A,\ P \text{ et } B \text{ sont alignés} & & \text{De même pour } B,\ C \text{ et } Q \\
 & = & -(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) + k\pi \\
\text{Par la question 3.} & = & k'\pi
\end{array}$$

Donc les points P, Q et R sont alignés.