Devoir Maison: Produit scalaire

Exercice 1: (58 p 202)

1. Montrons que $||\vec{u}+\vec{v}||^2+||\vec{u}-\vec{v}||^2 = 2\left(||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2\right)$.

$$\begin{aligned}
||\vec{u}+\vec{v}||^2+||\vec{u}-\vec{v}||^2 &= ||\vec{u}||^2+2\vec{u}.\vec{v}+||\vec{v}||^2 \\
&\quad ||\vec{u}||^2-2\vec{u}.\vec{v}+||\vec{v}||^2 \\
&= 2||\vec{u}||^2+2||\vec{v}||^2+2\vec{u}.\vec{v}-2\vec{u}.\vec{v} \\
&= 2\left(||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2\right)
\end{aligned}$$

2. Montrons l'identité d'Apollonius. Pour cela on va appliquer le résultat de la question précédente à $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$.
   Comme on a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ par la relation de Chasles.
   Et que $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}$ par la relation de Chasles et en utilisant le fait que $ABCD$ soit un parallélogramme et donc que $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$.
   La relation montrée à la question précédente donne

$$||\overrightarrow{AC}||^2+||\overrightarrow{BD}||^2 = 2\left(||\overrightarrow{AB}||^2+||\overrightarrow{BC}||^2\right)$$
$$AC^2+BD^2 = 2\left(AB^2+BC^2\right)$$

3. Calculons la longueur de la diagonale $[BD]$. Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
BD^2 &= 2(AB^2+BC^2)-AC^2 \\
&= 2(6^2+4^2)-8^2 \\
BD^2 &= 40 \\
BD &= \sqrt{40}=2\sqrt{10}
\end{aligned}$$

Exercice 2: (70 p 203)

1. ABF est un triangle inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ dont le coté $[AF]$ est une diagonale de ce cercle. On en déduit donc que ABF est un triangle rectangle en B. Ainsi B est le projeté orthogonal de F sur (AB). On peut donc simplifier le produit scalaire

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=AB^2$$

   De la même façon, C est le projeté orthogonal de F sur (AC) et donc le produit scalaire se simplifie

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}=AC^2$$

   o

2. Montrons que $AB^2+AC^2=2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AF}$.

$$\begin{aligned}
AB^2+AC^2 &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AF} \\
&= \left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right).\overrightarrow{AF}+\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right).\overrightarrow{AF} \\
&= \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{AF} \\
&= 2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{AF} \\
\text{or } \overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IC} &= 2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AF}
\end{aligned}$$

Exercice 3: (95 p 205)

1. Calculons les produits scalaires.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}||^2 - ||\overrightarrow{BA}||^2 - ||\overrightarrow{AC}||^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(BC^2 - BA^2 - AC^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(4^2 - 7^2 - 5^2\right) \\
&= -29 \\
\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -20 & \\
\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC} = 4 &
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = 29 \\
\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} &= -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 20
\end{aligned}$$

3. Calculons la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$. On sait que $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = ||\overrightarrow{BA}||\,||\overrightarrow{BC}||\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$ donc

$$\begin{aligned}
\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) &= \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{||\overrightarrow{BA}||\,||\overrightarrow{BC}||} \\
&= \frac{-20}{7\times 4} \\
\widehat{ABC} &= \cos^{-1}\left(\frac{20}{28}\right) \\
&= 44.4
\end{aligned}$$

On fait de la même manière pour l'angle $\widehat{BAC}$

$$\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\frac{29}{35}\right) = 34.0$$

Et on déduit le dernier angle

$$\widehat{ACB} = 180 - \widehat{ABC} - \widehat{BAC} = 180 - 44 - 34 = 101.6$$