Devoir surveillé: Application de la dérivation le retour

Sujet Finlande

Beaucoup d'exercices sont guidées. Vous pouvez donc sauter des questions et utiliser le résultat pour continuer. Par contre toutes les réponses devront être soigneusement justifiées.

Exercice 1: (5 points)
Donner l'ensemble de définition et dérivation puis dériver des fonctions f et g définies de la manière suivante

$$f : x \mapsto \sqrt{x}\left(x^{30} + \frac{1}{x}\right)$$
$$g : x \mapsto \frac{2x-8}{x^2-2x-3}$$

Exercice 2: (8 points)
Soit la fonction $f(x) = -x^3 - x^2 + x + 3$.

1. Étudier le sens de variation de f.
2. Construire la courbe représentative de f sur $[-3; 2]$ dans un repère orthogonal d'unité 0,5cm sur l'axe des abscisse et 2cm sur l'axe des ordonnées.
3. Déterminer l'équation de la tangente,T, à $\mathcal{C}_f$ (la courbe représentative de f) au point A d'abscisse -2. La tracer sur le graphique. Dans la suite, on notera $t(x)$ la fonction associée à T.
4. Nous allons étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et T. Pour cela on pose $d(x) = f(x) - t(x)$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = (x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$
   (b) Determiner le signe de $d(x)$ et déduire les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T.
5. Existe-t-il des points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est paralèlle à la droite d'équation $y = 9x$? Si oui, préciser leurs coordonnées.

Exercice 3: (7 points)
On veux étudier la différence entre f et g deux fonctions définies de la manière suivante

$$f : x \mapsto \frac{x-1}{3-2x} \quad g : x \mapsto -\frac{1}{2}x$$

Pour cela on pose la fonction $h(x) = f(x) - g(x)$

1. Montrer que h peut s'écrire sous la forme suivante

$$h : x \mapsto \frac{x^2 - \frac{1}{2}x - 1}{3-2x}$$

2. Montrer que la dérivée de h est de la forme suivante

$$h'(x) = \frac{-2x^2 + 6x - \frac{7}{2}}{(3-2x)^2}$$

   Et étudier le sens de variation de h.
3. Montrer que sur $]\frac{3}{2} ; \infty[$, g est au dessus de f.