Oscillateurs

Ce TD utilise des résultats présents dans le poly sur les oscillateurs. Nous ne nous intéresserons pas à la mise en place des équations. Nous porterons notre attention sur l'analyse de ces équations grâce à Maple. Voyez ce TD comme un façon de visualiser les solutions des équations que vous manipulez.

Nous aurons besoin des deux bibliothèques suivantes: `plots` et `DEtools`. Et nous utiliserons essentiellement les deux commandes suivantes:

- `dsolve` résout formellement les équations
- `DEplot(eqn, vars, ranges, [CIs], linecolor = [colors], scene = [-,-], stepsize = 0.1)` (attention aux majuscules) trace directement les trajectoires (avec `scene = [t,x]`) ou les portraits de phase (avec `scene = [x,v]`).

1 Oscillateur simple

Intéressons nous à l'équation représentant une masse reliée à un ressort

$$x'' + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{où} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$x(0) = a, x'(0) = 0$$

Jusqu'à la fin de ce TD, nous supposerons que $\omega_0 = 2\pi$.

- Résolvez et tracez les solutions de cette équation avec les conditions initiales $a = 1$ et 2.5 (dans la suite du TD, on reprendra ces conditions initiales).
- Transformez l'équation du second degré en un système de deux équations du premier degré en posant $v(t) = x'(t)$ la vitesse de la masse. Le système devra avoir la forme suivante avec a, b, c, d des constantes.

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = ax + bv \\ v' = cx + dv \end{array} \right.$$

- Tracez le portrait de phase des trajectoires $x(t), v(t)$ avec les mêmes conditions initiales.
- Une conjecture sur la nature de ces trajectoires? Pourquoi tournent elles dans le sens des aiguilles d'une montre? Quelle est la signification des flèches (`arrow = none` pour les désactiver)?

2 Oscillateur amorti

On ajoute un frottement fluide au système. L'équation devient alors

$$x'' + 2hx' + \omega_0^2 x = 0$$
$$x(0) = a, x'(0) = 0$$

On rappelle que le comportement de ce système dépend du signe de $\Delta = h^2 - \omega_0^2$. Effectuez les questions suivantes pour les 3 cas possibles (en adaptant les valeurs de h par exemple) et adaptez les paramètres pour faire apparaitre les différents comportements.

- Déterminez les solutions exactes.
- Essayez les fonctions `simplify` et `factor` sur les solutions.
- Tracez les.
- Tracez le portrait de phase (il faut avoir mis l'équation sous forme de système comme dans la première partie)

3 Régime forcé

On ajoute des oscillations forcées au système. L'équation devient

$$x'' + 2hx' + \omega_0^2 x = f\sin(\omega t)$$
$$x(0) = a, x'(0) = 0$$

- Mettre en évidence la transition de phase.

4 Système non linéaire (Van Der Pol)

Pour finir intéressons nous à l'équation suivante (que l'on retrouve dans des oscillateurs en électricité)

$$x'' - \varepsilon(1 - x^2)x' + \omega_0^2 x = 0$$

- Essayez de résoudre cette équation avec Maple.

Distinguons 3 comportements différents suivant les valeurs de ε.

- Tracez les portraits de phase pour les valeurs de ε suivante: -0.1, 0.5, 10.
- Que remarquez vous?