Polynômes

1 Polynômes

1.1 Les polynômes dans Maple

```
> p := x^5 + 4x^3 - 12x + 2; # Définition d'un polynôme

> type(p, polynom) # Tester si p est bien un polynome

> q := x^n - 1; type(q, polynom);
# Attention les exposants doivent être des nombres entiers

> q := 3x^2 + 1;

> q+p; q*p; # Les opérations sur les polynômes marchent.

> subs(x=1,p); # Évaluer p en 1

> f := unapply(p,x); # Transformer p en une fonction

> degree(p); # Degré du polynôme

> ldegree(p); # Valuation du polynôme

> coeffs(p,x); # Avoir tous les coefficients de p

> coeff(p,x,2); # Coefficient devant le terme x^2

> lcoeff(p,x); # Coefficient dominant de p

> rem(p,q,x); # Reste de la division euclidienne de p par q

> quo(p,q,x); # Quotient de la division euclidienne de p par q
```

1.2 Manipulation des polynômes

```
> expand(q*p); # Développer une forme factorisée

> factor(x^2 - 1); # Factorise un polynôme.

> factor(x^2 + 1); factor(x^2 + 1, I); # Il faut préciser dans quel corps on veut factoriser.

> factor(x^2 - 2); factor(x^2 - 2, sqrt(2)); # Même remarque

> factor(x^2+x+1); factor(x^2+x+1,[I,sqrt(3)]); # Encore un autre exemple
```

`factor` factorise par défaut dans le corps de base du polynôme (celui dans lequel sont ses coefficients). Le plus souvent ce corps est $\mathbb{Q}$. Pour lui dire de factoriser dans un corps plus grand, il faut lui préciser les éléments à ajouter au corps (on appelle cette "méthode" **extension de corps**). Il n'est pas toujours facile de connaitre les éléments à ajouter pour cela, on peut utiliser `RootOf`.

```
> allvalues(RootOf(x^2 - 2)); # Racines de x^2 - 2
```

On peut aussi directement se placer sur le corps $\mathbb{R}$ et avoir une factorisation complète mais nous n'aurons plus d'expression exacte.

```
> factor(x^2 - 2.0); # Factorisation complète mais approchée
```

Pour extraire les polynômes dans une forme Factorisée, on utilisera `convert`.

```
> p = x^2 - 1;

> convert(factor(p), list); # Sous forme de liste (l'ordre des facteurs est maintenu)

> convert(factor(p), set); # Sous forme d'ensemble (ordre non maintenu et par de doublons)
```

Exercice 1: On considère le polynôme suivant $P = X^4 + X^3 + aX^2 + \sqrt{2}X + b$.

1. Déterminer a et b tels que $1 + i$ soit une racine de P.
2. Trouver tous les zéros de P.
3. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2: Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tels que $P(-1) = -18$ et dont le reste de la division euclidienne par $X - 1$, $X - 2$ ou $X - 3$ soit égale à 6

Exercice 3: On s'intéresse aux polynômes de la forme $X^n - 1$.

1. Écrire une procédure `P` qui prend en argument `n` qui renvoie le polynôme $X^n - 1$.
2. Factoriser dans $\mathbb{Q}$ les 10 premiers polynômes de cette forme. Que peut-on conjecturer sur les coefficients des facteurs? (Les facteurs sont les polynômes **cyclotomiques**).
3. En espérant que vous ayez fait la bonne conjecture, nous allons essayer de la vérifier plus systématiquement. Écrire un procédure qui prend en argument `n` et qui renvoie l'ensemble (sans doublons) des coefficients des facteurs de $X^n - 1$.
4. Tester votre conjecture pour n allant jusqu'à 150. Que pouvez vous conclure?

Exercice 4: On s'intéresse maintenant aux polynômes de Tchebichev. On rappelle que se sont les polynômes T_n tels que $\cos(nt) = T_n(\cos(t))$.

1. Écrire une procédure qui prend en argument `n` et qui renvoie le polynôme de Tchebichev T_n. (`expand` marche aussi avec les fonctions trigonométriques).
2. Vérifier sur des petites valeurs de n et m que l'on a bien les propriétés suivantes:

$$\begin{array}{rcl} T_n(1) & = & 1 \\ T_n(T_m(X)) & = & T_{nm}(X) \\ T_n(-x) & = & (-1)^n T_n(x) \\ \forall n \in N \quad \forall k \leq n & & T_n\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right) = 0 \end{array}$$

3. Tracer les courbes des 5 premiers polynômes de Tchebichev sur un même graphique.

2 Fractions rationnelles

2.1 Les fractions rationnelles

```
> f := (x^2 - 3) / (x + 1); # définir une fraction rationnelle

> type(f, ratpoly); # les fractions rationnelles sont appelées ratpoly dans Maple

> numer(f); denom(f); # Numérateur et dénominateur de f

> f + 1; factor(f+1); normal(f+1); # Opération sur les fractions rationnelles et simplifications
```

3 Décomposition en éléments simples

```
> h := (x(x+2)) / (x+1);

> convert(h, parfrac, x); # Décomposition en éléments simples

> F:=1/(x^3+1): convert(F,parfrac,x,sqrt(3)); # Même soucis qu'avec les polynômes, il faut préciser le cor

> convert(F,parfrac,x,{sqrt(3),I});
```

Exercice 5: Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante $F = \frac{1}{X^4+1}$ sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$.