Méthode d'Euler

Le but de ce TD est de chercher puis d'approximer les solutions sur $[a, b]$ de

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \quad \forall t \in [a, b] \\ y(a) &= z_0 \end{aligned}$$

1 Solution Exacte (Calcul formel)

Maple arrive parfois à résoudre formellement ce type d'équation.

- Résoudre l'équation différentielle et tracer la courbe de la solution.

$$\begin{aligned} y' + y &= e^{-t}\cos(10t) \quad \forall t \in [0, 2] \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

- Écrire une procédure qui prend pour entrée f et z_0 (la valeur en a de la solution) et qui renvoie la fonction solution.

Commandes utiles:

- Pour résoudre l'équation différentielle, utiliser `dsolve`.
- `dsolve` ne renvoie pas exactement une fonction. Pour obtenir une fonction solution, utiliser `subs`.

2 Schéma d'Euler (Analyse numérique)

Rappel: (Méthode d'Euler):
On pose $t_i = a + i * \frac{b-a}{n}$.

On prend comme valeur approchée de la solution $y(t_i)$ la valeur z_i définie par récurrence par :

$$z_{i+1} = z_i + \frac{b-a}{n} * f(t_i, z_i)$$

Une représentation approchée de la solution est la ligne brisée passant par les points (t_i, z_i).

- Écrire une procédure qui prend en entrée :
  - f
  - n le nombre de subdivision de l'intervalle
  - a, b les extrémités de l'intervalle
  - z_0 la valeur en a de la solution recherchée.

  et qui renvoie la séquence $(t_i, z_i)_{i \in \{0..n\}}$ calculée par la méthode d'Euler.
- Tester la procédure sur l'équation différentielle avec $n = 10$ et tracer le résultat

$$\begin{aligned} y' + y &= e^{-t}\cos(10t) \quad \forall t \in [0, 2] \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

- Écrire une procédure qui prend en entrée :
  - f
  - n le nombre de subdivision de l'intervalle
  - a, b les extrémités de l'intervalle
  - z_0 la valeur en a de la solution recherchée.

  et qui renvoie le graphe de la solution approchée et celui de la solution exacte sur un même graphe.
- Tester la procédure sur l'équation différentielle avec différents n

$$\begin{aligned} y' + y &= e^{-t}\cos(10t) \quad \forall t \in [0,2] \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

Commandes utiles:

- En Maple, t_i se note `t[i]`.
- Pour créer la liste des points (t_i, z_i), utiliser `seq`. Si la liste est trop grande, Maple vous demandera d'utiliser `array`.
- Pour tracer plusieurs courbes sur un même graphe, donner un nom à chaque courbe puis utiliser `display`.

3 Évaluation de l'erreur

Nous allons maintenant nous intéresser à l'erreur commise par la méthode d'Euler. On calcule l'erreur suivante

$$E_n = \max_{i \in \{0..n\}} |y(t_i) - z_i|$$

Où $y(t)$ est la solution exacte et z_i la valeur en t_i de la solution approchée.

- Écrire une procédure qui prend en entrée :
  - y la solution exacte
  - $(t_i, z_i)_{i \in \{0..n\}}$ la solution approchée

  et qui renvoie l'erreur
- On restreint à l'équation $y'(t) = y(t)$ que l'on sait résoudre. Écrire une procédure qui prend en entrée :
  - a, b les extrémités de l'intervalle
  - z_0 la valeur en a de la solution recherchée.
  - (n_k) la liste des valeurs de n à tester

  et qui renvoie (n_k, E_{n_k}) les erreurs correspondant aux différentes valeurs de n.
- Tester la procédure avec $[a, b] = [0, 10]$, $z_0 = 1$ et $(n_k) = \{10, 20, .., 100\}$