TD – ALGEBRE LINEAIRE

Commandes utiles

> with(linalg) ; # pour charger le package d'algèbre linéaire.
> X:= vector([a_1, … , a_n]); # créé un n-uplet considéré comme vecteur colonne
> $X[i]$; # i-ième composante du vecteur X
> concat(V_1, ... , V_n); # crée la matrice dont les colonnes sont les vecteurs V_1, ... , V_n
> evalm($a * X + b * Y$); # combinaison linéaire des vecteurs X et Y, a et b étant des réels; *evalm* est l'évaluation des matrices et des vecteurs.
> convert(*liste* , vector) ; # convertit une liste en vecteur.
> basis([V_1, ... , V_n]); # extrait une base de Vect(V_1, ... , V_n)
> transpose(*matrice*) ; # échange lignes et colonnes de la matrice
> LUdecomp(*matrice*, L = 'ℓ' , P = 'p'); evalm(ℓ);evalm(p); # donne la décomposition *matrice* = PLU avec L triangulaire supérieure et U triangulaire inférieure (si *matrice* est carrée sinon U possède un bloc triangulaire en haut à gauche) et P la matrice de permutation des lignes exécutées éventuellement lors de la méthode du pivot.

> dotprod(X,Y) ; # produit scalaire de deux vecteurs; le résultat est un réel.
> crossprod(X,Y) ; # produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$; le résultat est un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

> subs(*ancien* = *nouveau* , *expression*) ; remplace chaque occurrence de *ancien* par *nouveau* dans *expression*.
> collect(*polynôme* , t) ; # écrit un polynôme dans la base canonique (1, t, t^2, …).
> expand(*expression*) ; # pour développer une expression. S'applique aussi à une combinaison linéaire de listes.
> coeffs(*polynôme* , t) ; # retourne la suite des coefficients du polynôme (pas forcément dans l'ordre !)
> coeff(*polynôme*, t , k) ; # retourne le coefficient de t^k dans *polynôme*, $k \geq 0$.
> degree(*polynôme*, t) ; # retourne le degré de $P(t)$.

Exercice 1

On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (ax_1 - 4x_2 + 2x_3 , - 5x_1 + ax_2 - x_3)$.
Définir l'application f sous Maple, la variable étant un vecteur à 3 composantes (utiliser > f := X –> vector([a*X[1] …]);)
Déterminer Ker (f) et Im f en fonction de a (résoudre un système à l'aide de la commande *solve* : par exemple pour le noyau, cela donne
> solve({seq(f (X)[j] = 0 , j = 1..2)} , {X[1],X[2],X[3]});

Exercice 2

On considère $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (9x_1 - 4x_2 + 2x_3 , - 5x_1 + x_2 - x_3 , - 3x_1 + 2x_3)$.
Déterminer Ker ($g + b$id); pour quelles valeurs de b, $g + b$id est-il un automorphisme ? (on pourra résoudre le système $g(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$.
Définir l'application $g_1 = g^3 + u\, g^2 + vg + w$id ; u, v, w étant des réels (NB : $g^3 = g \circ g \circ g$).
Déterminer des réels u, v, w tels que g_1 soit l'endomorphisme nul (résoudre $g_1(e_i) = 0$ pour chaque vecteur e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et conclure).

Exercice 3

On considère $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (2x_1 - 4x_2 + 2x_3 , - 5x_1 + x_2 - x_3 , 2x_2 - 3x_3 , x_1 + x_2 - x_3)$.
Noyau de h ? rg h ?
Résoudre l'équation $(2x_1 - 4x_2 + 2x_3 , - 5x_1 + x_2 - x_3 , 2x_2 - 3x_3) = (y_1, y_2, y_3)$.
En déduire une équation de Im h .

Exercice 4

On considère $F : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto (t^2 - 1)P''(t) + (-3t + 2)P'(t) + 4P(t-1) - P(t)$.

Déterminer Ker F (P et $F(P)$ seront des expressions polynomiales en la variable t et on utilisera la commande diff(P,t) … ; $P(t-1)$ désigne la composée des polynômes $t-1$ et P)

On considère $G : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_4[X]$, $P \mapsto t^2P''(t) + 2t(t+2)P'(t) - 2(4t-1)P(t+1) + P(t)$.

Déterminer $G(P)$ où P est dans $\mathbb{R}_3[X]$ (on pourra écrire P:= sum(a[k] * t^k , k = 0..3))

Prouver que G est injective et en déduire que Im g est un hyperplan de $\mathbb{R}_4[X]$.

Déterminer une équation de cet hyperplan.

Exercice 5

On considère les six 5-uplets suivants :

X1 := [30, 85, –50, 9, –75] , X2 := [0, 28, –11, 38, 32] , X3 := [54, 17, –13, –67, –125] , X4 := [24, –12, 15, 0, 14] , X5 := [–25, 55, 13, 11, –8] , X6 := [–13, 63, 15, 30, 15].

En extraire une base à l'aide de la commande basis de Maple et en déduire que $\mathcal{H}$ = Vect(X1, ... , X6) est un hyperplan de $\mathbb{R}^5$.

Déterminer alors une équation de $\mathcal{H}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^5$. Deux méthodes :

1) soit résoudre $\sum_{i=1}^{4} x_i V_i = (y_1, \dots, y_5)$ où $(V_1, \dots, V_4)$ est la base extraite; ne garder que 4 équations sur 5 puis remplacer dans l'équation laissée de côté, les x_i par leur expression en fonction des y_i ...)

2) soit chercher l'équation de l'hyperplan sous la forme $\sum_{i=1}^{5} \alpha_k y_i = 0$ en remarquant que les vecteurs de la base doivent satisfaire l'équation. Commande éventuellement utile : transpose(*matrice*) qui inverse les lignes et les colonnes d'une matrice ...

Exercice 6

Les quadruplets (P(1), P(2), P(3), P(4)), (P(2), P(3), P(4), P(5)), (P(3), P(4), P(5), P(6)) et (P(4), P(5), P(6), P(7)) forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}^4$ où P est une fonction polynomiale de degré 1,2,3 resp. ? (on pourra fabriquer les applications qui à une liste $[x_1, \dots, x_4]$ associent respectivement $[x_1 + 1, x_2 + 1, x_3 + 1, x_4 + 1]$ et $[P(x_1), \dots, P(x_4)]$ ...).

Vérifier que les résultats trouvés se généralisent en remplaçant (1,2,3,4) par un quadruplet de réels distincts deux à deux.

Exercice 7

Construire les matrices suivantes et calculer leur rang.

1) $((i+j)^k)_{i \le 4,\ j \le 5}$; $\left(\dfrac{ij}{i+j}\right)_{1 \le i,\ j \le n}$; $(\text{pgcd}(i,j))_{1 \le i,\ j \le n}$; calculer l'inverse dans les deux derniers cas.

2) matrice triangulaire supérieure $A = (a_{i,j})_{1 \le i,\ j \le n}$ avec $a_{i,j} = \begin{cases} j - i & \text{si } j > i \\ 0 & \text{si } i \ge j \end{cases}$. Calculer aussi Ker A, A^{n-1} et A^n

3) matrice "tribande" : $\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & c & a & b \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & c & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ ainsi que son inverse lorsque $a = b = c = 1$ et $n = 6$.

Lorsque $a = b = c = 1$, pour quelles valeurs de $n \le 30$, la matrice est-elle inversible ?

4) $((i-j)(i-j-1)) \in M_{7,5}(\mathbb{R})$; calcul du rang et décomposition PLU à l'aide de LUdecomp.
$((i-j)(i+j)) \in M_{4,7}(\mathbb{R})$;calcul du rang et décomposition PLU à l'aide de LUdecomp.

Exercice 8

1) Construire la fonction $A(n, f) = (f(i-j))_{1 \le i,\ j \le n}$ où f est une fonction donnée. Que peut-on dire de $A(n, f)$ selon la parité de f ?
2) Calculer le rang de $A(n, f)$ lorsque $f(t) = at^2 + bt + c$ (discuter en fonction de n).
3) Pour $f(t) = t(t-1)$, obtenir la décomposition PLU à l'aide de LUdecomp.

Exercice 9

Calculer le rang de la matrice suivante à l'aide de la commande rank et LUdecomp (attention la commande rank fait un calcul générique ce qui parfois laisse de côté les éventuels cas particuliers lorsqu'il y a un paramètre).

$$E = \begin{pmatrix} 28m+2 & 28m+1 & 8m+10 & 14+8m & 28m+13 \\ 10m-1 & -m+23 & -2m+17 & 26-18m & m+25 \\ 4-8m & 9-6m & 24-24m & 34-32m & 29-10m \\ 6m+1 & 21m+3 & 6m+15 & 22+6m & 29+11m \end{pmatrix}$$

Exercice 10

On considère la courbe de l'espace $x(t) = at^2 + bt + c$, $y(t) = a't^2 + b't + c'$, $z(t) = a''t^2 + b''t + c''$.
Prouver que la courbe est plane.

Exercice 11

Soient $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ a \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. On pose $u(X) = U\,{}^tVX$, $X \in M_4(\mathbb{R})$. Construire la matrice A de u relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Déterminer Ker$A$.

Déterminer a pour que $A^2 = 0$.

Soient $X_1 = (1,0,-1,0)$, $X_2 = (2,1,1,-2)$, $X_3 = (-1,1,2,-1)$, $X_4 = (0,-2,1,1)$. On note $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Construire la matrice de passage de la base canonique la base $\mathcal{B}$ puis calculer $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Exercice 12

Etant donné une matrice $A \in M_{n,p}(K)$, calculer $\displaystyle\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} a_{i,j}$, soit à l'aide de deux boucles for i .. for j ..., soit à l'aide d'un produit matriciel convenable. Les commandes rowdim et coldim calculent le nombre de lignes et de colonnes respectivement d'une matrice.

Exercice 13

Soit $A = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}$ avec $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$.

Construire X, Y puis A (on pourra utiliser blockmatrix(2,2,X,$-Y$,Y,X)).

Montrer que $A\,{}^tA$ est de la forme sI_4 en précisant le scalaire s. Calculer $A^2 - 2aA + sI_4$. Calculer $\frac{1}{2}(A + {}^tA)$.

Exercice 14

Déterminer les racines carrées de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ dans $M_2(\mathbb{C})$.

Exercice 15

Soit $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer un polynôme $a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $a_4A_1^4 + a_3A_1^3 + a_2A_1^2 + a_1A_1 + a_0I_4 = 0$ dans $M_4(\mathbb{R})$ (un tel polynôme est appelé polynôme annulateur de A_1). Comparer avec charpoly(A_1, t).

Même question pour la matrice "compagnon" : $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b_0 \\ 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{pmatrix}$.

Exercice 16

Prouver à l'aide de Maple que les déterminants suivants sont nuls

$$\begin{vmatrix} 7+4\sqrt{3} & 2+\sqrt{3} \\ -4-3\sqrt{3} & 1-2\sqrt{3} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 7+4\sqrt{3} & 3\sqrt{3}+4 \\ -4-3\sqrt{3} & -13+4\sqrt{3} \end{vmatrix}$$

Exercice 17

Etant donné une matrice $B_1 \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B_2 \in M_{2,3}(\mathbb{R})$, prouver que $\det(B_1B_2) = 0$, d'abord à l'aide d'un calcul “bête“ à l'aide de Maple, ensuite en réfléchissant …

Exercice 18

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$. Lorsque A est inversible, prouver que A^{-1} est de la même forme que A.

Exercice 19

Fabriquer la matrice de Hilbert $\left(\dfrac{1}{i+j+1}\right)_{0 \le i,\, j \le n}$ puis calculer son déterminant pour différentes valeurs de n.

Vérifier pour ces valeurs de n que ce déterminant est égal à $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{(k!)^4}{(2k+1)(2k)!^2}$

Exercice 20

On considère la matrice antisymétrique $A := \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ -a & 0 & b \\ -c & -b & 0 \end{pmatrix}$

Prouver à l'aide de Maple que la matrice $B := (A - I_3)(A + I_3)^{-1}$ est orthogonale puis calculer det B

Exercice 21

On considère le produit scalaire $(f \mid g) = \displaystyle\int_a^b f(t)\, g(t)\, w(t)\, dt$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ où w est une fonction continue strictement positive sur $]a,b[$. Ecrire une procédure qui prend en paramètres n, a, b, w et qui retourne la matrice du produit scalaire dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 22 (Calcul du produit scalaire)

On pourra prendre pour S l'une des matrices suivantes

$$S_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Ecrire une procédure ps prenant en paramètres deux vecteurs x et y (cf exemples §1.2) et la matrice S du produit scalaire étudié et qui retourne le produit scalaire $(x|y)$.

Exercice 23 (Gram-Schmidt)

Ecrire une procédure qui prend en paramètre

$$\begin{cases} \text{la matrice } S \text{ d'un produit scalaire dans une base } \mathcal{B}_1 \text{ donnée} \\ \text{une matrice } P \text{ dont les colonnes (au moins deux) sont les coordonnées dans } \mathcal{B}_1 \text{ d'une famille libre } \mathcal{B}_2 \end{cases}$$

et qui retourne la matrice dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées dans $\mathcal{B}_1$ de la famille orthonormale $\mathcal{B}_3$ obtenue à partir de $\mathcal{B}_2$ par le procédé de Gram-Schmidt.

NB : Vous pouvez utiliser la commande >debug(*nom_proc*); pour faire tourner la procédure pas à pas afin de localiser les erreurs …

Utiliser cette procédure pour écrire une nouvelle procédure qui prend en paramètre une matrice P comme précédemment et un vecteur X et qui retourne le projeté orthogonal de X sur le sev engendré par les vecteurs colonnes de P.