Algèbre linéaire

LinearAlgebra

Ce TD est consacré à l'utilisation de Maple pour faire de l'algèbre linéaire. Pour cela, il faudra charger au début de la feuille de calcul la bibliothèque `LinearAlgebra`.

Remarque: Il existe aussi la bibliothèque `Linalg` mais elle est considérée comme obsolète. Nous utiliserons uniquement la bibliothèque `LinearAlgebra`.

1 Les vecteurs: `Vector`

```
>Vector([1,2,3]) #  Un vecteur colonne de dimension 3

>Vector[row]([1,2,3]) # Un vecteur ligne de dimension 3

>V1 + V2 # Addition des vecteur V1 et V2 s'ils ont les même dimensions

>3*V # Multiplication par un scalaire du vecteur V

>V1.V2 # Produit scalaire de V1 par V2

>Dimension(V)} # Dimension du vecteur V

>Basis([V1, V2, V3]) # Renvoie un base de $Vect(V1, V2, V3)
```

Exercice 1: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Déterminer le rang de A ainsi qu'une base de son image.

2 Les matrices: `Matrix`

2.1 Création de matrices

```
> Matrix([[ 1, 2, 3],[4, 5, 6],[7, 8, 9]]); # Matrice à partir de la liste des lignes

> convert(C, Matrix); # Matrice à partir de la liste des colonnes

> Matrix(3, 2, [1, 2, 3, 4, 5]); # Matrice à partir des dimension de la liste des coéficients

> Matrix(2, 5, 0); # À partir des dimensions et d'une seul valeur

> f := (i,j) -> |i-j|; # Un fonction avec deux arguments

> Matrix(3, 4, f); # À partir des dimensions et d'une fonction à deux arguments

> A := Matrix(3, 3); #  Matrice avec que des 0

> A[1, 2] := 2; # Modification d'un seul élément de la matrice

> A[2..3,2..3] := Matrix(2,2,5); Modification d'un bloc

> IdentityMatrix(n)  # Matrice identité de taille n
```

```
> DiagonalMatrix([1, 2, 3, 4, 5])  # Matrice diagonale
```

2.2 Opération sur les matrices

```
> A:=Matrix([[0,1,2],[1,1,1]]): B:=Matrix([[5,4,0],[2,5,-1]]): # on crée des matrices pour les exemples
C:=Matrix([[1,-1,2],[1,0,1],[1,1,2]]): V:= Vector([1,20,1]):

> Dimension(A)  # Dimension de la matrice

> A + B  # Addition de matrices

> A.B; A.C; A.C # Multiplication de matrices

> Transpose(A)  # Transposition

> C^2  # Puissance de matrices

> C^(-1)  # Inverser une matrice

> Trace(C)  # Trace de la matrice

> Determinant(C)  # Déterminant
```

Exercice 2: Créer les matrices suivantes, dire si elles sont inversibles, calculer l'inverse quand c'est possible et calculer la puissance n-ième. Comme les matrices suivantes dépendent de n, vous pouvez faire une procédure qui prend en argument n et qui renvoie la matrice voulu.

1. $\left(\dfrac{ji}{i+j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$
2. $(pgcd(i,j))_{1\leq i,j\leq n}$
3. $\left((i+j)^k\right)_{1\leq j,i\leq n}$.
4. $\forall i,j\leq n\ a_{ij}=\begin{cases} i-j \text{ si } i\leq j \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$. (On pourra utilise `piecewise`.)

Exercice 3: Fabriquez la matrice de Hilbert $\left(\dfrac{1}{i+j+1}\right)_{i,j\leq n}$ et calculer son déterminant suivant les valeurs de n. Vérifier que pour ces valeurs, le determinant est égal à

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{(k!)^2}{(2k+1)(2k)!^2}$$

2.3 Système linéaire

```
> solve({x+y+z=0,2*x+3*y+z=1,x+y-z=2}); # résout le système d'équations

> A:=Matrix([[1,1,1],[2,3,1],[1,1,-1]]):b:=Vector([0,1,2]):

> LinearSolve(A,b); # Résout le système associé.

> A:=Matrix([[1,1,1],[2,3,1],[1,1,-1]]): b:=Matrix([[0,1,1],[0,0,0],[2,1,1]]):

> LinearSolve(A,b); # Marche aussi avec les équations matricielles
```

Exercice 4: Résoudre le système d'équation de deux manières différentes

$$\begin{cases} x+2y+3z &= 1\\ -2x+4y+z &= 2\\ x+18y+17z &= 9\end{cases}$$

Exercice 5: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Trouver les matrices $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$.
2. Trouver les matrices $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $ABA = A$

Exercice 6: Trouve les matrices qui commutent avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2.4 Noyau, image, rang

```
> Rank(A)  # Donne le rang de A
```

```
> ColumnSpace(A)  # Calcule une base de l'image de A
```

```
> NullSpace(A)  # Calcule une base du noyau de A
```

Exercice 7: Refaire l'exercice 1

Exercice 8: Pour tout $n \in \mathbb{N}*$, on définit A_n de manière suivante

$$(A_n)_{ij} = (i+j)^3$$

1. Écrire une procédure prenant n en argument et renvoyant la matrice A_n.
2. Conjecturer la valeur du rang de A_n en fonction de n.