Devoir surveillé: Application de la dérivation le retour

Sujet 2

Devise Shadocks : S'il n'y a pas de solution, c'est qu'il n'y a pas de problème.

Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.

Beaucoup d'exercices sont guidées. Vous pouvez donc sauter des questions et utiliser le résultat pour continuer. Par contre toutes les réponses devront être soigneusement justifiées.

Exercice 1: (2 points) **Cours**

- Donner la définition du produit scalaire (la première)
- Donner l'expression du produit scalaire avec les angles et la norme des vecteurs.

Exercice 2: (3 points)
Donner l'ensemble de définition et dérivation puis dériver de la fonction f définie de la manière suivante

$$f : x \mapsto \frac{2x-8}{x^2-2x-3}$$

Exercice 3: (8 points)
Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{1}{3}$.

1. Étudier le sens de variation de f.
2. Construire la courbe représentative de f sur $[-6; 7]$ dans un repère orthogonal d'unité 0,25cm sur l'axe des abscisse et 1cm sur l'axe des ordonnées.
3. Déterminer l'équation de la tangente, Δ à $\mathcal{C}_f$ (la courbe représentative de f) au point A d'abscisse 2. La tracer sur le graphique. On notera $\delta(x) = mx + p$ la fonction assiciee à Δ.
4. Nous allons étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et Δ. Pour cela on pose $d(x) = f(x) - \delta(x)$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 4) = \frac{1}{3}(x-2)^2(x+1)$
   (b) Determiner le signe de $d(x)$ et déduire les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.
5. (Dure) Existe-t-il des points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est paralèlle à la droite d'équation $y = -8x$? Si oui, préciser leurs coordonnées.

Exercice 4: (7 points)
On veux étudier la différence entre f et g deux fonctions définies de la manière suivante

$$\begin{aligned} f : x &\mapsto \frac{\frac{-13}{3}x + 1}{x-3} \\ g : x &\mapsto x \end{aligned}$$

Pour cela on pose la fonction $h(x) = f(x) - g(x)$

1. Montrer que h peut s'écrire sous la forme suivante
$$h : x \mapsto \frac{-x^2 + \frac{4}{3}x + 1}{x-3}$$
2. Montrer que la dérivée de h est de la forme suivante
$$h'(x) = \frac{-x^2 + 6x - 5}{(x-3)^2}$$
Et étudier le sens de variation de h.
3. Montrer que sur $]3 ; \infty[$, g est au dessus de f.