Correction du Devoir Maison 1

Exercice 1: (19p98)

1. Résolution de l'équation $\frac{6}{5} = \frac{3+x}{2+x}$.

$$\begin{aligned}
\frac{6}{5} = \frac{3+x}{2+x} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{6}{5} \times (2+x) = (2+x) \times \frac{(3+x)}{(2+x)} \\
\text{On simplifie et on développe} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{6}{5} \times 2 + \frac{6}{5}x = 3 + x \\
\text{On met ce qui n'a pas de } x \text{ à gauche et le reste à droite} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{12}{5} - 3 = -\frac{6}{5}x + x \\
\text{On met les fractions sur le même dénominateur} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{12}{5} - \frac{3 \times 5}{5} = -\frac{6}{5}x + \frac{5}{5}x \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{-3}{5} = -\frac{1}{5}x \\
\text{On divise par } \tfrac{1}{5} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{-3}{5} \times \frac{5}{1} = -x \\
&\Leftrightarrow \quad x = 3
\end{aligned}$$

   Donc la solution de l'équation est 3.

2. Quand on trace les graphiques de ces deux fonctions sur la calculatrice, on remarque que les graphiques s'intersectent en 1 point. L'abscisse de ce point est la solution de l'équation suivante

$$\frac{6}{5} = \frac{3+x}{2+x}$$

3. Les coordonnées du point d'intersection est

$$\left(3\ ;\ \frac{6}{5}\right)$$

Exercice 2: (22p99)

1. Résolution de l'inéquation $\frac{3x+2}{x-5} \geq 0$.

   Domaine de définition. Cherchons la valeur interdite (c'est-à-dire la valeur de x tel que le dénominateur s'annule).

$$x - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$$

   Donc 5 est une valeur interdite. Donc le domaine de définition de $x \mapsto \frac{3x+2}{x-5}$ est

$$D =]-\infty\ ,\ 5[\cup]5\ ,\ +\infty[$$

   Signe du numérateur Cherchons les valeurs de x tel que le numérateur soit positif

$$\begin{aligned}
3x + 2 \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x \geq -2 \\
\text{3 est positif} \quad &\Leftrightarrow \quad x \geq \frac{-2}{3} = \frac{-1}{3}
\end{aligned}$$

   Donc le $3x + 2$ est positif quand $x \geq \frac{-1}{3}$

Signe du dénominateur Cherchons les valeurs de x tel que le dénominateur soit positif

$$x - 5 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 5$$

Donc le $x - 5$ est positif quand $x \geq 5$

Tableau de signe

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		5		$+\infty$
$3x+2$		$-$	0	$+$	||	$+$	
$x-5$		$-$	|	$-$	||	$+$	
$\frac{3x+2}{x-5}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

On répond à la question ! La solution de $\frac{3x+2}{x-5} \geq 0$ (Donc on prend les endroits où il y a des "+"dans le tableau) est

$$\mathcal{S} =]-\infty\,, -\frac{1}{3}\,] \cup]\,5\,, +\infty[$$

2. Celui là ce fait de la la même manière que le précèdent (attention tout de même dans l'étude du signe du numérateur au -7 !).
3. Résolution de l'inéquation $\frac{3x+7}{3x+5} < 0$.

Domaine de définition. Cherchons la valeur interdite (c'est-à-dire la valeur de x tel que le dénominateur s'annule).

$$\begin{aligned} 3x + 5 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x = -5 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{-5}{3} \end{aligned}$$

Donc $\frac{-5}{3}$ est une valeur interdite. Donc le domaine de définition de $x \mapsto \frac{3x+7}{3x+5}$ est

$$D =]-\infty\,,\ \frac{-5}{3}[\cup]\frac{-5}{3}\ ,\ +\infty[$$

Signe du numérateur Cherchons les valeurs de x tel que le numérateur soit positif

$$\begin{aligned} 3x + 7 \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x \geq -7 \\ 3 \text{ est positif} \quad &\Leftrightarrow \quad x \geq \frac{-7}{3} \end{aligned}$$

Donc le $3x + 7$ est positif quand $x \geq \frac{-7}{3}$

Signe du dénominateur Cherchons les valeurs de x tel que le dénominateur soit positif

$$\begin{aligned} 3x + 5 \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x \geq -5 \\ 3 \text{ est positif} \quad &\Leftrightarrow \quad x \geq \frac{-5}{3} \end{aligned}$$

Donc le $3x + 5$ est positif quand $x \geq \frac{-5}{3}$

Tableau de signe

x	$-\infty$		$\frac{-7}{3}$		$\frac{-5}{3}$		$+\infty$
$3x+7$		$-$	0	$+$	||	$+$	
$3x+5$		$-$	|	$-$	||	$+$	
$\frac{3x+2}{x-5}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

On répond à la question ! La solution de $\frac{3x+7}{3x+5} < 0$ (Donc on prend les endroits où il y a des "-" dans le tableau) est

$$\mathcal{S} =]\frac{-7}{3}\ ,\ \frac{-5}{3}[$$

Exercice 3: (55p104)

1. Résolution de l'équation

$$\begin{aligned}
\frac{6x+1}{3x-2} = \frac{2x+5}{x+3} &\Leftrightarrow (x+3)(3x-2) \times \frac{(6x+1)}{(3x-2)} = (x+3)(3x-2) \times \frac{(2x+5)}{(x+3)} \\
\text{On simplifie} &\Leftrightarrow (x+3)(6x+1) = (3x-2)(2x+5) \\
\text{On développe} &\Leftrightarrow 6x \times x + 3 \times 6x + x + 3 \times 1 = 3x \times 2x + 5 \times 3x - 2 \times 2x - 2 \times 5 \\
&\Leftrightarrow 6x^2 + 19x + 3 = 6x^2 + 11x - 10 \\
\text{On range les éléments} &\Leftrightarrow 19x - 11x = -10 - 3 \\
&\Leftrightarrow 8x = -13 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{-13}{8}
\end{aligned}$$

Donc la solution peut être $\frac{-13}{8}$, il faut encore vérifier qu'elle n'annule pas un des deux dénominateurs.

$$\begin{aligned}
3 \times \frac{-13}{8} - 2 = \frac{-39}{8} - \frac{16}{8} = \frac{-55}{8} \neq 0 \\
\frac{-13}{8} + 3 = \frac{-13}{8} + \frac{24}{8} = \frac{11}{8} \neq 0
\end{aligned}$$

Donc comme $\frac{-13}{8}$ n'annule pas les dénominateurs, c'est la solution.

2. On trace les deux courbes sur la calculette et on vérifie que le point d'intersection a pour abscisse $\frac{-13}{8}$.
3. Résolution de l'équation

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x+1} = \frac{2x+5}{x-3} = &\Leftrightarrow (x+1)(x-3) \times \frac{x}{x+1} = (x+1)(x-3) \times \frac{2x+5}{x-3} \\
&\Leftrightarrow (x-3)x = (x+1)(2x-5) \\
&\Leftrightarrow x^2 - 3x = 2x^2 + 2x - 5x - 5 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 3x = 2x^2 - 3x - 5 \\
&\Leftrightarrow 5 - x^2 = 0 \\
\text{On reconnait une identité remarquable} &\Leftrightarrow (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0 \\
\text{2 cas possibles} &\Leftrightarrow x - \sqrt{5} = 0 \text{ ou } x + \sqrt{5} = 0 \\
&\Leftrightarrow x = \sqrt{5} \text{ ou } x = -\sqrt{5}
\end{aligned}$$

Il faut vérifier que ces deux solutions n'annulent pas les dénominateurs (à faire).
Donc les solutions de l'équation sont $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$
Si vous tracez les deux fonctions sur votre calculette, vous vous rendrez compte qu'il a deux points d'intersections d'abscisse $\sqrt{5}$ et $-\sqrt{5}$.