Devoir maison: Dérivation et fonction

Terminale STMG – À rendre le avril 2015

Exercice 1

On s'intéresse à la propagation d'une maladie dans une ville de 130000 habitants. La fonction f définie sur l'intervalle $[0;40]$ par

$$f(x) = -30t^2 + 1260t + 4000$$

modélise le nombre de personnes touchées par la maladie au bout de t jours de suivi de la propagation.

1 *Répondre aux questions ci-dessous par lecture graphique. Les résultats seronts justifiés en commentant le travail réalisé sur le graphique et en y laissant les traits de construction.*

a. Déterminer le nombre de personnes touchées par la maladie au bout de 15 jours de suivi de la propagation.

> **Solution:** Au bout de 15 jours de suivi de la propagation, le nombre de personnes touchées par la maladie est d'environ $\boxed{16\,000}$ (voir traits de constructions en rouge sur l'annexe).

b. Le conseil municipal a décidé de fermer les crèches de la ville lorsque plus de 12% de la population est touchée par la maladie. Justifier qu'à partir de 15600 personnes contaminées, le conseil municipal ferme les crèches.

> **Solution:** On calcule ce que représente 12% de la population :
>
> $$130000 \times \frac{12}{100} = 15600$$
>
> Comme la ville ferme les crèches lorsque plus de 12% de la ville est touchée, elle ferme les crèches quand plus de 15 600 personnes sont contaminées.

c. Pendant combien de jours les crèches ont-elles été fermée ?

> **Solution:** Pour répondre à cette question, il faut déterminer quels sont les jours où la population touchée par la maladie est supérieur à 15 600 (voir traits de construction en vert sur l'annexe). On peut lire sur le graphique, qu'entre le 13e jour et le 28e jour, il y a plus de 15 600 personnes touchées, donc les crèches sont fermées pendant 15jours.

d. Combien de personnes, au maximum, on été touchée par la maladie ?

> **Solution:** D'après le graphique (traits en jaune), au maximum de l'épidémie, il y eu 17 000 personnes malades.

2 a. Déterminer,pour tout réel t de l'intervalle $[0;40]$, l'expression de $f'(t)$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

> **Solution:** $f(t) = -30t^2 + 1\,260t + 4\,000$ donc $f'(t) = -30 \times 2t + 1\,260 = \boxed{-60t + 1\,260}$.

b. Étudier le signe de $f'(t)$ pour t variant dans l'intervalle $[0;40]$. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

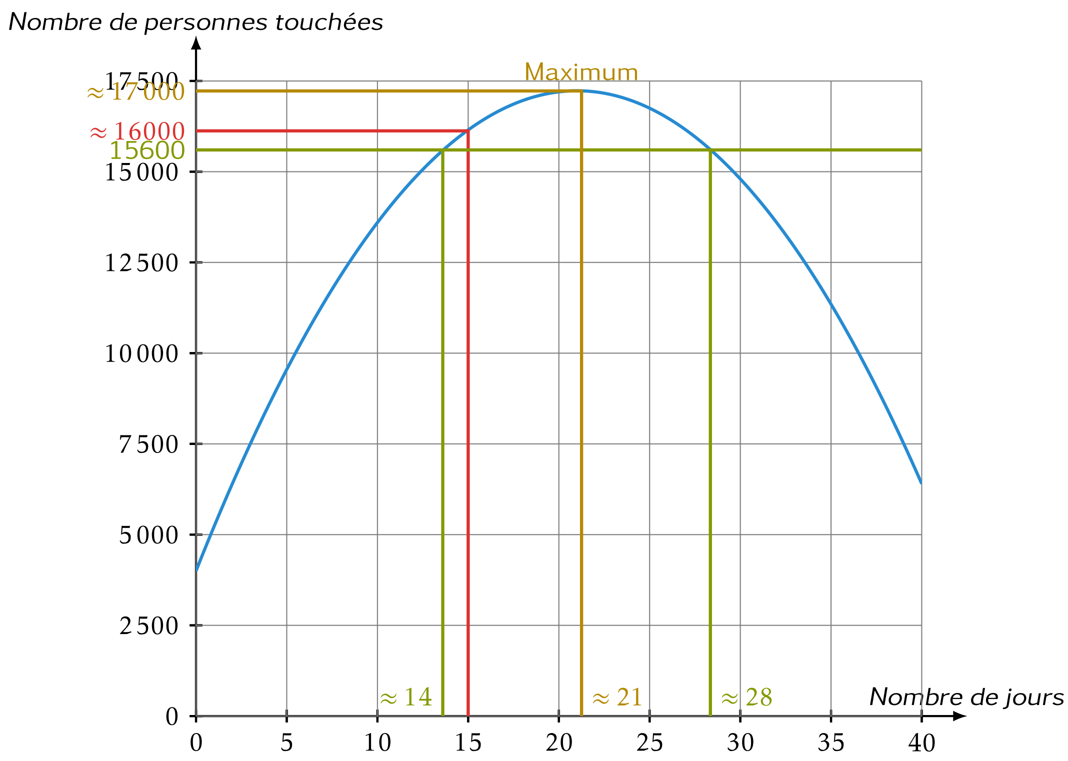
> **Solution:** on étudie le signe de la dérivée :
>
> $$\begin{aligned} f'(t) > 0 &\Leftrightarrow -60t + 1260 > 0 \\ &\Leftrightarrow -60t > -1260 \\ &\Leftrightarrow t < \frac{-1260}{-60} \qquad \text{On change le sens de l'inégalité car on a divisé par -60} \\ &\Leftrightarrow t < 21 \end{aligned}$$

Donc $f'(t)$ est positif quand t est plus petit que 21.
Le tableau de variation de f est donc

t	0		21		40
Signe de $f'(t)$		+	0	−	
Variations de $f(t)$	4000	↗	17230	↘	6400

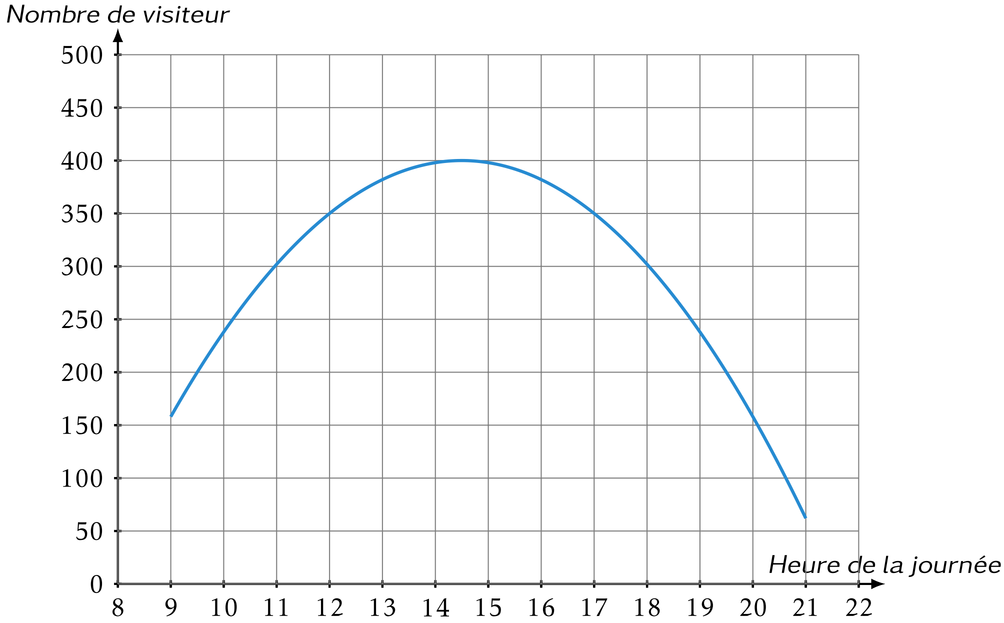
c. Au bout de combien de jours de suivi de la propagation le nombre de personnes touchées par la maladie est-il maximal ?
Combien y a-t-il alors de personnes touchées ?

Solution: Le nombre de personnes touchées par la maladie est maximal **au bout de 20 jours**.
Le nombre de personnes touchées est alors de $16\,000$



Exercice 2

Un parc d'attractions est ouvert au public de 9 h à 21 h. La courbe C donnée ci-dessous représente l'évolution du nombre de visiteurs attendus durant une journée



1 a. Recopier le tableau suivant et le compléter avec la précision permise par le graphique ci-dessus.

Heure de la journée	11 h	12 h
Nombre de visiteurs attendus	300	350

b. Quel est le taux d'évolution, en pourcentage arrondi à 0,1 %, du nombre de visiteurs attendus entre 11 heures et 12 heures ?

Solution: Le taux d'évolution du nombre de visiteurs attendus entre 11 heures et 12 heures est :

$$\frac{350-300}{300} = \frac{50}{300} = \frac{1}{6} \approx \boxed{16{,}7\,\%}$$

2 Lorsque le nombre de visiteurs est supérieur ou égal à 300, un fond musical est diffusé par les haut-parleurs du parc.

Un touriste aimerait faire la visite en profitant du fond musical.

Quels horaires peut-on conseiller à ce touriste pour se rendre au parc d'attractions ?

Solution: Le nombre de visiteurs est supérieur à 300 entre 11 h et 18 h, donc le visiteur, s'il veut bénéficier d'un fond musical, doit venir **entre 11 h et 18 h**.

3 La courbe C ci-dessus est la représentation graphique sur l'intervalle $[9\,;21]$ de la fonction f définie par

$$f(x) = -8x^2 + 232x - 1282$$

a. Déterminer les nombres de visiteurs attendus à 11 h et à 12 h.

Solution: $f(11) = 302$ donc le nombre de visiteurs attendus à 11 h est de $\boxed{302}$.

$f(12) = 350$ donc le nombre de visiteurs attendus à 12 h est de $\boxed{350}$

Comment peut-on expliquer les éventuels écarts avec les résultats de la question 1. a. ?

Solution: Une lecture graphique est imprécise, ce qui explique la petite erreur sur le nombre de visiteurs à 11 h.

b. Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

Solution: On dérive f

$$f'(x) = -8\times 2x+232=-16x+232$$

c. En déduire, par le calcul, l'heure à laquelle le nombre de visiteurs attendus est maximal, et donner la valeur de ce maximum.

Solution:

$$\begin{aligned} f'(x)>0 &\Leftrightarrow -16x+232>0 \\ &\Leftrightarrow -16x>-232 \\ &\Leftrightarrow x<\frac{-232}{-16} \\ &\Leftrightarrow x<14,5 \end{aligned}$$

On change le sens de l'inégalité car on a divisé par -16

Donc $f'(x)$ est positif quand x est plus petit que 14,5.
On en déduit le tableau de variation de f :

t	9		14.5		21
Signe de $f'(t)$		+	0	−	
Variations de $f(t)$	158	↗	400	↘	62

Le maximum de visiteurs est atteint à 14 h 30 et est de 400 visiteurs.

Exercice 3

Une entreprise possède une chaîne de fabrication capable de fabriquer en une semaine entre 6000 et 32000 pièces identiques. Le coût de fabrication, en euros, de x milliers de pièces, pour x compris entre 6 et 32, est noté $C(x)$ où C est la fonction définie sur l'intervalle [6 ; 32] par

$$C(x) = 2x^3 - 108x^2 + 5060x - 4640.$$

La représentation graphique de la fonction C est donnée en annexe.
Toutes les pièces produites sont vendues au prix de 3,5 € l'unité.
Pour tout x appartenant à l'intervalle [6 ; 32], on note $R(x)$ le montant de la vente en euros de x milliers de pièces. Le bénéfice $B(x)$, en euros, pour la production et la vente de x milliers de pièces est
$B(x) = R(x) - C(x)$.

1 Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle [6 ; 32] : $R(x) = 3500x$.

Solution: Comme chaque pièce produites est vendue à 3,5€et que x est en miliers de pièces, on en déduit $R(x) = 3,5 \times 1000 \times x = 350x$.

2 Représenter la fonction R sur l'annexe, à remettre avec la copie.

Solution: En rouge sur l'annexe.

3 Par lecture graphique, et avec la précision permise par celui-ci, répondre aux questions suivantes. On laissera apparents tous les tracés utiles aux lectures graphiques.

a. Quel nombre de pièces produites correspond à un coût de 30000 € ?

Solution: Un coût de 30 000€correspond à 8 pièces produites.

b. Quel nombre minimal de pièces fabriquées permet d'avoir un bénéfice positif ou nul ?

Solution: Le bénéfice est nul quand les courbes rouges et bleu se rencontrent. Ici, elles se rencontrent pour environ 18 pièces produites.

4 Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle [6 ; 32] :

$$B(x) = -2x^3 + 108x^2 - 1560x + 4640.$$

Solution: Pour calculer les bénéfices on utilise la formule **Bénéfices = Recettes - Coûts** donc

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) = 3500x - \left(2x^3 - 108x^2 + 60x - 4640\right) \\ &= 3500x - 2x^3 + 108x^2 - 1560x + 4640 \\ &= -2x^3 + 108x^2 - 1560x + 4640 \end{aligned}$$

On retrouve bien la formule proposée dans l'énnoncé.

5 On désigne par B' la fonction dérivée de la fonction B.

a. Calculer $B'(x)$.

Solution: On dérive B

$$\begin{aligned} B'(x) &= -2 \times 3 \times x^{3-1} + 108 \times 2 \times x^{2-1} - 1560 + 0 \\ &= -6x^2 + 216x - 1560 \end{aligned}$$

b. Vérifier que $B'(x) = (-6x + 60)(x - 26)$.

Solution: Pour répondre à cette question, on va développer l'expression proposée dans la question.

$$\begin{aligned}(-6x+60)(x-26) &= -6x\times x-6x\times(-26)+60\times x+60\times(-26)\\ &= -6x^2+156x+60x+1560\\ &= -6x^2+216x+1560\\ &= B'(x)\end{aligned}$$

6 a. Étudier le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[6\,;32]$.

Solution: Comme $B'(x)$ est un polynôme du 2nd degré on utilise la méthode du discriminant :

$$\Delta = b^2-4ac = 216^2-4\times(-6)\times(-1560) = 9216$$

Comme Δ est positif, il y a deux racines

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-216-\sqrt{9216}}{2\times(-6)} = 26\\ x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-216+\sqrt{9216}}{2\times(-6)} = 10\end{aligned}$$

Comme $a=-6$ négatif, on en déduit le tableau de signe de B'

x	6		10		26		32
Signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

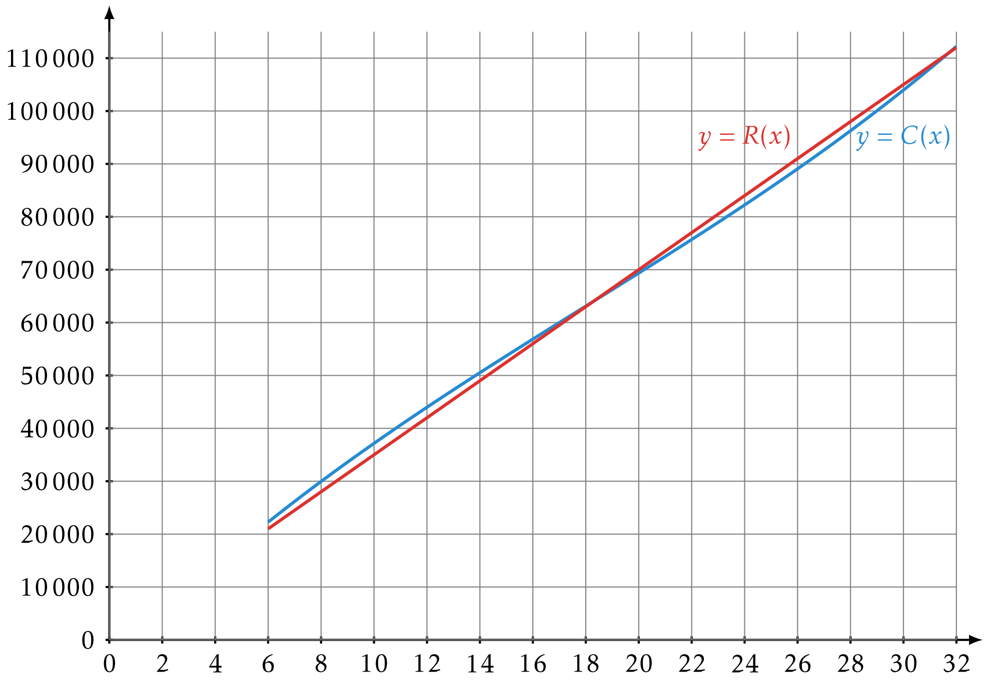
b. En déduire le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle $[6\,;32]$.

Solution: On déduit du tableau de signe trouvé à la question précédente le tableau de variation de B

x	6		10		26		32
Signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de $B(x)$	-1264	$\searrow$	-2160	$\nearrow$	1936	$\searrow$	-224

7 Quel est le bénéfice maximal réalisable par l'entreprise ? Donner le nombre de pièces à produire réalisant ce maximum.

Solution: D'après le tableur de variations, le bénéfice maximal est de 1936 qui est atteind pour 26 000 pièces vendues.


110 000
100 000
90 000
80 000
70 000
60 000
50 000
40 000
30 000
20 000
10 000
0
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32
$y = R(x)$
$y = C(x)$