Dériver puis étudier les variations de $h(x) = \dfrac{3x^2 - x - 1}{4x - 1}$

- **Domaine de définition de h.**

  On constate que $h(x) = \dfrac{3x^2 - x - 1}{4x - 1} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec

  $$u(x) = 3x^2 - x - 1 \qquad\qquad v(x) = 4x - 1$$

  Ces deux fonctions sont des polynômes donc sont définis sur $\mathbb{R}$. Les valeurs interdites arrivent quand $u(x) = 0$. On résout cette équation

  $$\begin{aligned} u(x) = 0 &\Leftrightarrow 4x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

  Donc le domaine de définition de h est $D_h = \mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$.

- **Dérivation**

  Comme nous l'avons vu plus haut, h est de la forme $h(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ nous allons donc utiliser la dernière formule du tableau pour dériver. Pour cela nous avons besoin de dériver u et v

  $$\begin{aligned} u(x) = 3x^2 - x - 1 &\quad \text{donc} \quad u'(x) = 6x - 1 \\ v(x) = 4x - 1 &\quad \text{donc} \quad v'(x) = 4 \end{aligned}$$

  On applique la formule

  $$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{(6x-1)(4x-1) - (3x^2 - x - 1) \times 4}{(4x-1)^2} \\ &= \frac{24x^2 - 6x - 4x + 1 - (12x^2 - 4x - 4)}{(4x-1)^2} \\ &= \frac{24x^2 - 10x + 1 - 12x^2 + 4x + 4}{(4x-1)^2} \\ &= \frac{(24-12)x^2 + (-10+4)x + 1 + 4}{(4x-1)^2} \\ h'(x) &= \frac{12x^2 - 6x + 5}{(4x-1)^2} \end{aligned}$$

- **Étude des variations de h**

  Comme le dénominateur de h' est un carré (toujours positif), h' a le même signe que le numérateur $12x^2 - 6x + 5$. Pour déterminer le signe de ce polynôme, on utilise la méthode du discriminant

  $$\begin{aligned} \Delta = b^2 - 4ac &= (-6)^2 - 4 \times 12 \times 5 \\ &= 36 - 240 \\ &= -204 \end{aligned}$$

  $\Delta < 0$, il n'y donc pas de racine et le polynôme est du signe de $a = 12 > 0$. Donc $12x^2 - 6x + 5$ est toujours positif donc $h'(x)$ est toujours positif. On en déduit le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
Signe de h'		$+$	$\Vert$	$+$	
Variations de h		↗	$\Vert$	↗	