Devoir Commun

Première S

10 février 2015

Épreuve de :

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve: 3 heures

Correction

Ce sujet comporte 14 pages, numérotées de 1 / 14 à 14/ 14

Dès qu'il vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

L'échange de calculatrice entre les élèves est strictement interdit.

L'usage du dictionnaire n'est pas autorisé.

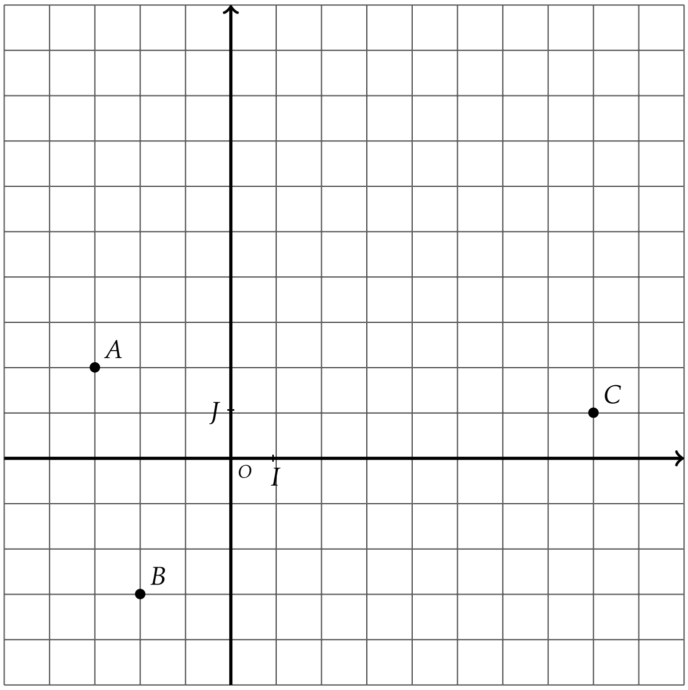
Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	9	4	8	10	5	36

4 points sont réservés à la présentation et à la rédaction.

Exercice 1 9 points

1 Tracer un repère orthonormé et placer les points $A(-3;2)$, $B(-2;-3)$ et $C(8;1)$.

Solution:



2 Tracer la droite (BC) puis calculer une équation cartésienne de cette droite.

Solution: Pour répondre à cette question, il y a deux méthodes.

- **Méthode 1** Où l'on cherche un vecteur directeur qui nous permet d'avoir la première partie de l'équation puis un point de cette droite permet de retrouver c.
- **Méthode 2** Où l'on utilise 2 vecteurs directeurs dont un avec un point fixe puis la formule de la colinéarité permet de trouver l'équation.

Ces deux méthodes vont être faites ici. Les élèves de premières S2 sont invités à prendre connaissance de la 2e méthode, on l'utilisera plus tard dans un future chapitre.

Méthode 1

Calcul de l'équation cartésienne de la droite (BC).

On commence par déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de (BC)

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-(-2) \\ 1-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Donc on en déduit l'équation cartésienne de (BC)

$$4x - 10y + c = 0$$

Il reste à trouver c pour cela on utilise le point C

$$\begin{aligned} C(8,1) \in (BC) &\Leftrightarrow 4\times 8 - 10\times 1 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow c = -22 \end{aligned}$$

Donc une équation cartésienne de (BC) est

$$4x - 10y - 22 = 0$$

On peut vérifer que l'on s'est pas trompé en vérifiant que B est bien un point de cette droite

$$4 \times (-2) - 10 \times (-3) - 22 = -8 + 30 - 22 = 0$$

Le point B est donc bien un point de cette droite.

Méthode 2

Comme pour la méthode 1, on retrouve les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On prend un point quelconque $M(x;y)$ de la droite (BC) et on calcule les coordonnées de $\overrightarrow{BM}$:

$$\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} x_M - x_B \\ y_M - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - (-2) \\ y - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2 \\ y + 3 \end{pmatrix}$$

Comme $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires, on sait que $xy' - x'y = 0$

$$\begin{aligned} 4(x+2) - 10(y+3) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4x + 8 - 10y - 30 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 4x - 10y - 22 = 0 \end{aligned}$$

On retrouve bien la même équation qu'avec la méthode 1. Même si ce ne sera pas fait, cette méthode s'applique aux questions suivantes.

3 a. Tracer la droite (d_1) passant par A et qui a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_1).

Solution: Comme $\overrightarrow{v}$ est un vecteur directeur de (d_1), on a la première partie de son équation cartésienne

$$2x - 5y + c = 0$$

On utilise le point A pour déterminer c

$$\begin{aligned} A(-3;2) \in (d_1) \quad &\Leftrightarrow \quad 2 \times (-3) - 5 \times 2 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad c = 16 \end{aligned}$$

Donc une équation cartésienne de (d_1) est

$$2x - 5y + 16 = 0$$

4 Les droites (BC) et (d_1) sont-elles parallèles ?

Solution: Ces droites sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

$$xy' - x'y = 10 \times 2 - 4 \times 5 = 20 - 20 = 0$$

Donc leurs vecteurs directeurs sont colinéaires donc les droites (BC) et (d_1) sont parallèles.

5 Soit (d_2) la droite d'équation $3x - 4y + 3 = 0$. Les droites (d_1) et (d_2) sont-elles parallèles ?

Solution: On commence par déterminer un vecteur directeur, $\overrightarrow{w}$, de la droite (d_2) :

$$\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On vérifie si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires

$$xy' - x'y = 4 \times 2 - 3 \times 5 = 12 - 15 = -3 \neq 0$$

Donc les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires donc les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.

Exercice 2 — 4 points

Soit f la fonction définie par

$$f : x \mapsto 2x^3 + 21x^2 - 180x + 6$$

Tracer le tableau de variation de cette fonction.

Solution: Pour tracer le tableau de variation de f, il faut commencer par la dériver.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times 3 \times x^2 + 21 \times 2 \times x - 180 \\ f'(x) &= 6x^2 + 42x - 180 \end{aligned}$$

Ensuite on étudie le signe de f', pour cela on utilise la méthode du discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = 42^2 - 4 \times 6 \times (-180) = 1764 + 4320 = 6084$$

Ici $\Delta > 0$, il y a donc deux racines

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-42 - \sqrt{6084}}{2 \times 6} = -10 \\ x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-42 + \sqrt{6084}}{2 \times 6} = 3 \end{aligned}$$

Comme $a = 6 > 0$, on en déduit le tableau de signe de f' puis les variations de f

x	$-\infty$		-10		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-10)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	

Avec

$$\begin{aligned} f(-10) &= 2\times(-10)^3+21\times(-10)^2-180\times(-10)+6=1906 \\ f(3) &= 2\times 3^3+21\times 3^2-180\times 3+6=-291 \end{aligned}$$

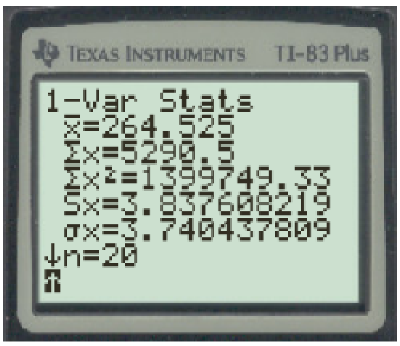
Exercice 3 — 8 points

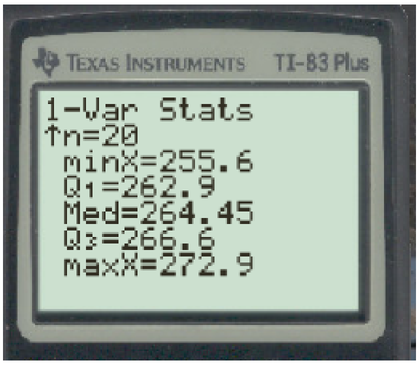
Une machine déverse du caoutchouc de façon continue dans un moule pour fabriquer des joints d'étanchéité que l'on utilise dans l'industrie automobile. On veut contrôler la régularité de l'écoulement du caoutchouc dont les variations affectent les dimensions du joint. On effectue alors des mesures sur cette machine. On obtient des masses de caoutchouc en grammes, chacune étant obtenue par un écoulement de caoutchouc d'une durée de 30 secondes. On a obtenu 20 mesures.

269,7	263,6	264,4	259,7	262,4
263,4	260,7	265	267	265,6
268,8	260,3	263,4	267,6	264,1
272,9	264,5	266,2	265,9	265,3

1. Déterminer la moyenne, l'écart-type, la médiane, les quartiles et l'écart interquartile de cette série.

Solution: Cette question pouvait être faite avec la calculatrice.





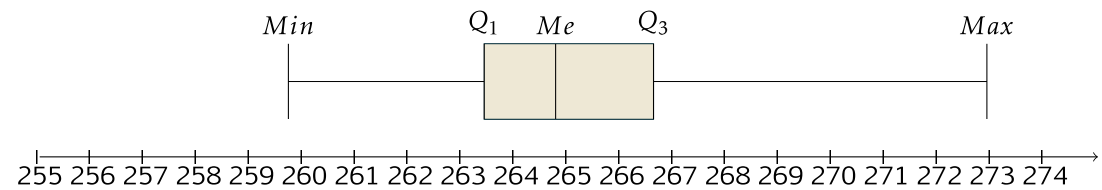
Voici les résultats donnés par un tableur

	A	B	C	D
3	264,4			
4	259,7		moyenne	265,025
5	262,4		Ecart-type	3,1330297
6	263,4		min	259,7
7	260,7		Q1	263,4
8	265		ME	264,75
9	267		Q3	266,4
10	265,6		max	272,9
11	268,8			
12	260,3			
13	263,4			
14	267,6			
15	264,1			
16	272,9			
17	264,5			
18	266,2			
19	265,9			
20	265,3			
21				

La seule différence entre les 2 est Q_3. Dans la suite, on choisira la valeur de la calculatrice.

2 Construire un diagramme en boîte permettant une première analyse.

Solution: Diagramme en boite de cette analyse :



3 Quel pourcentage des valeurs obtenues lors de ce contrôle se trouvent entre 263,4 et 266,4 ?

Solution: **Avec les valeurs du tableur** on peut répondre de cette façon :

On remarque que $Q_1 = 263,4$ et $Q_3 = 266,4$, donc entre ces deux valeurs, il y a 50% des données.

Avec les valeurs de la calculatrice on peut compter les données entre ces deux valeurs puis calculer la fréquence.

4 Le statisticien J.W Tukey qualifiait d'aberrantes les valeurs d'une série statistique qui se situaient à l'extérieur de l'intervalle : $[Q_1 - 1,3 \times I\,; Q_3 + 1,3 \times I]$, où I **désigne l'écart interquartile**, Q_1 le premier quartile et Q_3 le troisième quartile.

a. Le contrôle sur la machine fait-il apparaître des valeurs aberrantes ? Lesquelles ?

Solution: On commence par calculer les bornes de cet intervalle. Pour cela il faut calculer I l'écart interquartile

$$I = Q_3 - Q_1 = 266,6 - 263,4 = 3,2$$

Puis les bornes

- Borne inferieur : $Q_1 - 1,3 \times I = 263,4 - 1,3 \times 3,2 = 259,1$

- Borne supérieur : $Q_3 + 1,3 \times I = 266,4 + 1,3 \times 3,2 = 270,8$

On peut compter seulement une valeur aberrante qui est $272,9$.

b. Quel est le pourcentage de valeurs aberrantes ?

Solution: Pourcentage de valeurs aberrantes :

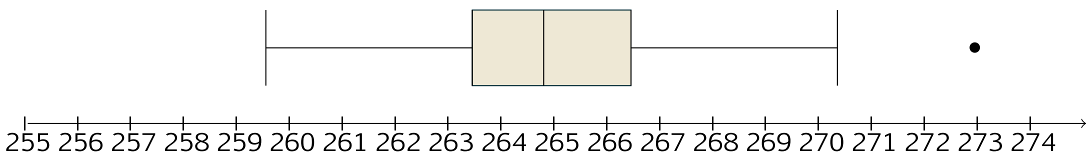
$$\frac{1}{20} = 0,05 = 5\%$$

5 Il existe plusieurs méthodes de construction d'un diagramme en boîte. Voici une forme, légèrement différente de celle vu en cours, utilisée par J.W. Tukey pour faire apparaître les valeurs qualifiées d'aberrantes :

- Le rectangle central est inchangé : la limite inférieure est fixée au premier quartile, la limite supérieure au troisième quartile et une ligne, donnant la position de la médiane, coupe le rectangle.
- Les "moustaches" sont elles modifiées : leur longueur vaut 1,3 fois l'écart interquartile. Ainsi, les deux extrémités des "moustaches" ont pour valeurs : $Q_1 - 1,3 \times I$ et $Q_3 + 1,3 \times I$.
- Les valeurs situées hors de ces "moustaches" correspondent aux observations aberrantes et sont représentées chacune par un point.

a. En utilisant la même graduation qu'à la question 2, construire un tel diagramme en boîte correspondant aux valeurs de la série.

Solution:



b. Comparer les deux diagrammes.

Solution: On remarque que le corps du diagramme en boite n'a pas changé. Seul la moustache de droite a été modifiée.

Exercice 4 10 points

L'entreprise *Bibuild* veut lancer une nouvelle gamme de visseuse sur le marché. Elle a fait appel à une entreprise experte qui lui a fait les rapports suivants.

Étude de marché :

Dans ce rapport, x représente le prix d'une visseuse. Ce prix est limité à 130€ après quoi l'étude suivante perd son sens.

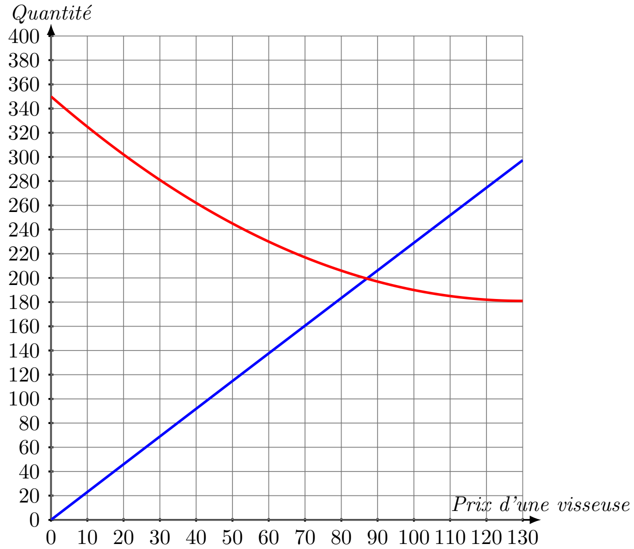
Notre étude nous a amené à modéliser l'offre et la demande par les deux fonctions suivantes :

La fonction d'offre est donnée par

$$O(x) = -0,001x^2 + 2,3x$$

La fonction de demande est donnée par

$$D(x) = 0,01x^2 - 2,6x + 350$$



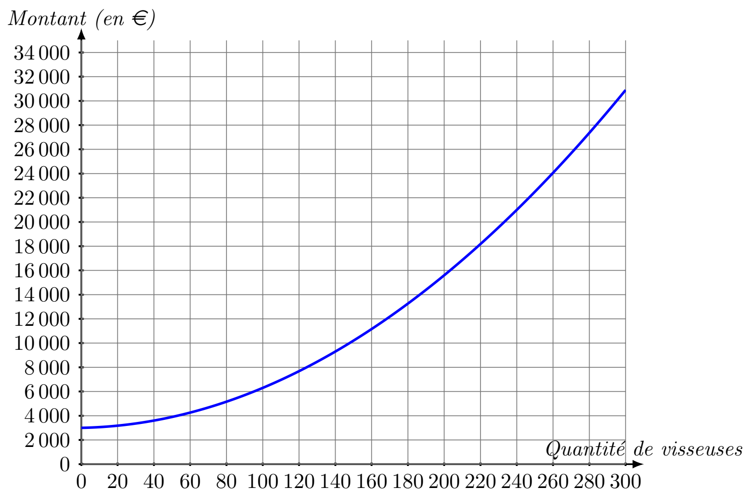
Nous vous rappelons que pour qu'une entente soit trouvée entre l'acheteur et le vendeur, il faut que l'offre soit égale à la demande. On appelle alors *prix d'équilibre du produit* le prix pour lequel l'offre est égale à la demande.

Étude de la production

Ici x représente la quantité de visseuses. Les capacités de l'usine font que la production est limitée à 300 visseuses.

Coût de production

$$C(x) = 0,3x^2 + 3x + 3000$$



Nous vous rappelons que les bénéfices se calculent de la manière suivante

Bénéfices = Recettes - Coûts

Analyse de l'étude de marché

L'étude de marché va permettre de déterminer le prix optimal d'une visseuse.

1 a. Déterminer **graphiquement** le nombre de produits offerts et le nombre de produits demandés lorsque le prix du produit est de 18€.

> **Solution:** À cette question, il est mal vu de reprendre les résultats du calcul de la question suivante surtout quand la précision du graphique ne le permet pas ou que les calculs sont faux...

b. Retrouver ces résultats par le calcul.

> **Solution:** Nombre de produits offerts
>
> $$O(18) = -0,001 \times 18^2 + 2,3 \times 18 \approx 41$$
>
> Nombre de produits demandés
>
> $$D(18) = 0,01 \times 18^2 - 2,6 \times 18 + 350 \approx 306$$

c. Dans ce cas là, y a-t-il plus d'offre ou de demande ?

> **Solution:** Pour des visseuses à 18€la demande est plus forte que l'offre.

d. Donner un prix où la situation est inversée.

> **Solution:** Si une visseuse coûte 110€, l'offre serait plus forte que la demande.

2 Pour que l'entreprise puisse vendre tout ce qu'elle produit, il faut qu'elle fixe le prix de ces visseuses au prix d'équilibre. Déterminer ce prix et la quantité échangée associée.

> **Solution:** On cherche le prix, x, pour que l'offre, $O(x)$, soit égale à la demande, $D(x)$. On résout donc l'équation suivante :
>
> $$\begin{aligned} O(x) = D(x) &\Leftrightarrow -0,001x^2 + 2,3x = 0,01x^2 - 2,6x + 350 \\ &\Leftrightarrow -0,001x^2 - 0,01x^2 + 2,3x + 2,6x - 350 = 0 \\ &\Leftrightarrow -0,011x^2 + 4,9x - 350 = 0 \end{aligned}$$
>
> On reconnait une équation de 2nd degré.
>
> $$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 4,9^2 - 4 \times (-0,011) \times (-350) \\ &= 8,61 \end{aligned}$$

Δ est positif, il y a donc deux solutions

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4,9-\sqrt{8,61}}{2\times(-0,011)} = 356.10$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4,9+\sqrt{8,61}}{2\times(-0,011)} = 89.35$$

La première solution ne correspond pas à un prix acceptable pour l'expert car x est limité entre 0 et 130.

Donc le prix d'équilibre est donc 89,35€.

Analyse de la production

Le gérant de l'entreprise, après avoir lu l'étude de marché, fixe le prix d'une visseuse à 89,99€. Il doit maintenant déterminer combien de visseuses son entreprise doit produire pour maximiser ses bénéfices.

3 Déterminer la fonction R qui calcule les recettes à partir du nombre de visseuses x.

Solution: Comme chaque visseuse est vendue 89,99€, les recettes sont données par la fonction suivante

$$R(x) = 89,99x$$

4 Combien doit-il produire de visseuses pour que ses bénéfices soient maximaux ?

Solution: On commence par déterminer la fonction bénéfice

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 89,99x - (0,3x^2 + 3x + 3000) \\ &= -0,3x^2 + 86,99x - 3000 \end{aligned}$$

Pour déterminer le nombre de visseuses pour que les bénéfices soient maximaux il faut avoir le tableau de variation de B. Pour cela il y a deux méthodes.

- En dérivant B puis en étudiant le signe de B' pour trouver le sens de variation de B.
- En utilisant le chapitre sur la forme canonique. C'est cette méthode qui va être détaillé ici.

On calcule les coordonnées du sommet de la parabole

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-86,99}{2\times(-0,3)} \approx 144,98$$
$$\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a} = 3306,05$$

Comme $a = -0,3 < 0$ on en déduit le tableau de variation

x	$-\infty$	$\alpha = 144,98$	$+\infty$
Variation de $B(x)$	$\nearrow$	$\beta = 3306,05$	$\searrow$

Comme un nombre de visseuse est un nombre entier, il faut choisir entre $x = 144$ et $x = 145$.

$$\begin{aligned} B(144) &= -0,3\times 144^2 + 86,99\times 144 - 3000 = 3305,76 \\ B(145) &= -0,3\times 145^2 + 86,99\times 145 - 3000 = 3306,04 \end{aligned}$$

Les bénéfices sont maximaux pour 145 visseuses vendues. L'entreprise fait alors 3306,04€de bénéfices.

5 Combien de zavisseuses doit-il produire pour que ses bénéfices soient supérieurs à 3000€ ?

Solution: Dans cette question, toute trace de recherche était valorisée. Voici quelques possibilités pour approcher le résultat.

- Faire un tableau de valeur avec la calculatrice et déterminer les quantités
- Faire un graphique et retrouver ces nombre.
- Résoudre l'inéquation $B(x) > 3000$. C'est cette méthode qui est utilisée ici.

Pour que les bénéfices soient supérieurs à 3000€, il faut trouver les valeurs de x tels que $B(x) > 3000$ ou encore résoudre l'équation suivante

$$-0,3x^2 + 86,99x - 3000 > 3000 \quad\Leftrightarrow\quad -0,3x^2 + 86,99x - 6000 > 0$$

On utilise la méthode du discriminant.

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = 86,99^2 - 4\times(-0,3)\times(-6000) \\ &= 367.26 \end{aligned}$$

Ici $\Delta > 0$, il y a donc deux racines

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-86,99-\sqrt{367,26}}{2\times(-0,3)} = 176,92 \\ x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-86,99+\sqrt{367,26}}{2\times(-0,3)} = 113,04 \end{aligned}$$

Ici $a = -0,3 < 0$ on en déduit le tableau de signe suivant

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $-0,3x^3 + 86,99x - 6000$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc les bénéfices sont supérieurs à 3000€quand la production est comprise entre 114 et 176 visseuses.

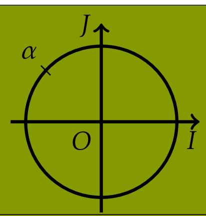
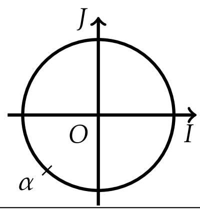
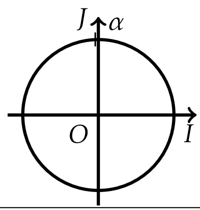
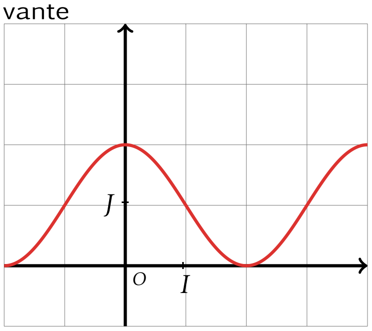
Exercice 5 — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiplies (QCM).

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est correcte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question ainsi que la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse juste rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice est ramenée à 0.

		A	B	C
1	Placer l'angle $\alpha = \frac{-5\pi}{4}$.			
2	Donner la mesure principale de l'angle $\frac{2015\pi}{4}$	$\frac{-1}{4}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$503,75\pi$
3	Convertir en degrés $\frac{-5\pi}{3}$	300	-300	60
4	Calculer le nombre dérivé en -3 de $f : x \mapsto x^2 - 4x - 1$	-10	$10 + h$	-2
5	Déterminer l'équation réduite de la tangente en 1 de la fonction suivante 	$y = -x + 2$	$y = x + 2$	$y = 2x + 1$

Solution: On ne demandait de justifier le QCM mais voici les explications.

1. La réponse B correspond à un angle de $\frac{5\pi}{4}$ et la réponse C correspond à un angle de $\frac{\pi}{2}$.
2. $$\frac{2015\pi}{4} = \frac{-\pi}{4} + \frac{2016\pi}{4} = \frac{-\pi}{4} + 252\pi$$

   252π correspond à 126 tours complets. La mesure principale de l'angle $\frac{2015\pi}{4}$ est donc $\frac{-\pi}{4}$ qui est bien dans $]-\pi\,;\pi]$.
3. Pour convertir en degré, on peut faire un produit en croix ou directement le calcul suivant

   $$\frac{-5\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = \frac{-5 \times 180}{3} = -300$$

   Or un angle en degré n'est pas orienté donc il n'a pas de signe. La réponse est donc 300.

4. Pour calculer le nombre dérivé, soit on utilise le tauw d'accoissement ($\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ soit on calcule la dérivé. C'est cette dernière méthode qui va être présentée.

$$f'(x) \quad = \quad 2x - 4 + 0$$

On évalue en -3 la dérivé pour trouver le nombre dérivé

$$f'(-3) \quad = \quad 2 \times (-3) - 4 = -10$$

5. On trace la tangente à la courbe en 1