Devoir surveillé: 5

Première S 2 – 26 janvier 2015 – Durée : 1 heure

Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.

Exercice 1 — 6 points

Soit $A(2;3)$, $B(6;1)$, $C(5;-9)$, $D(-2;-5)$ et $E(0;-1)$.

1 Donner une équation cartésienne de (AB)

Solution: Pour trouver l'équation cartésienne de (AB), il faut calculer les coordonnées du vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On en déduit une équation cartésienne de (AB)

$$-2x - 4y + c = 0$$

Il reste à determiner c. Pour cela on utilise le point A

$$\begin{aligned} A(2;3) \in (AB) &\Leftrightarrow -2\times 2 - 4\times 3 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow -16 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow c = 16 \end{aligned}$$

Donc une équation cartésienne de la droite (AB) est

$$-2x - 4y + 16 = 0$$

2 a. Donner une équation de la droite (d) parallèle à (AB) passant par C.

Solution: Comme (d) et (AB) sont deux droites parallèles, elles ont les mêmes vecteurs directeur. Donc $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d). On en déduit une équation cartésienne de (d)

$$-2x - 4y + c = 0$$

Il reste à determiner c. Pour cela on utilise le point C

$$\begin{aligned} C(5;-9) \in (d) &\Leftrightarrow -2\times 5 - 4\times(-9) + c = 0 \\ &\Leftrightarrow 26 + c = 0 \\ &\Leftrightarrow c = -26 \end{aligned}$$

Donc une équation cartésienne de la droite (d) est

$$-2x - 4y - 26 = 0$$

b. La droite (d) passe-t-elle par le point D ?

Solution: On vérifie si le point D est un point de la droite (d). Pour cela, il faut que les coordonnées de D vérifient l'équation de (d)

$$-2\times(-2) - 4\times(-5) - 26 = 4 + 20 - 26 = -2 \neq 0$$

Donc le point D n'est pas un point de (d) donc (d) ne passe pas par le point D.

c. Que peut-on en déduire concernant les droites (AB) et (CD) ?

Solution: Comme (d) ne passe pas par le point D, les droites (d) et (CD) ne sont pas confondues ou parallèles, elles sont donc sécantes. Comme (d) et (AB) sont parallèles, (CD) et (AB) sont elles aussi sécantes.

Exercice 2 — 9 points

Dans cet exercice, il est demandé de ne pas arrondir les fractions et simplifier au maximum les resultats.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \quad \mapsto \quad \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{1}{3}$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

1 Étudier le sens de variation de la fonction f.

Solution: Pour étudier le signe de f, il faut connaître le signe de sa drérivée.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3} \times 3 \times x^2 - 2 \times x - 8 + 0 \\ f'(x) &= x^2 - 2x - 8 \end{aligned}$$

On reconnait un polynôme du degré 2. Pour étudier son signe on utilise la méthode du discriminant ;

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-8) \\ &= 4 + 32 = 36 \end{aligned}$$

Ici Δ es positif il y a donc 2 racines

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{2-6}{2} = -2 \\ x_12 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{2+6}{2} = 4 \end{aligned}$$

Comme $a = 1$ positif, on en déduit le tableau de signe de f' puis le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$f(-2) = \frac{29}{3}$	↘	$f(4) = \frac{-77}{3}$	↗	

2 On suppose que l'équation réduire de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2 est

$$y \quad = \quad -8x - 1$$

Pour étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de T (savoir laquelle des deux courbes est au dessus), on pose $d(x) = -8x - 1 - f(x)$.

a. Déduire l'expression de d.

Solution:

$$\begin{aligned} d(x) &= -8x-1-f(x) \\ &= -8x-1-(\frac{1}{3}x^3-x^2-8x+\frac{1}{3}) \\ &= -8x-1-\frac{1}{3}x^3+x^2+8x-\frac{1}{3} \\ &= \frac{-1}{3}x^3+x^2-\frac{4}{3} \end{aligned}$$

b. Tracer le tableau de variations de d

Solution: On veut tracer le tableau de variation de d pour ça il faut avoir le signe de sa dérivé, d'.

$$\begin{aligned} d'(x) &= 3\times\frac{-1}{3}\times x^2+2\times x+0 \\ &= -x^2+2x \\ &= x(-x+2) \end{aligned}$$

Ici on pourrait faire la méthode du discriminant comme dans la question précédente (c'était la méthode attendu). Je vais vous présenter une autre méthode qui ne marche pas dans tous les cas mais qui se rapproche de ce que l'on fera dans le prochain chapitre sur la dérivation.

On va utiliser le fait que l'on a factoriser d' et utiliser les rêgles de multiplication de signe ($+\times+=+$, $-\times-=+$ et $+\times-=-$)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
$d'(x) = x(-x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$d(x)$		$\searrow$	$d(2)=\frac{-1}{3}$	$\nearrow$	$d(2)=\frac{19}{3}$	$\searrow$	

c. En déduire que pour x compris entre 5 et 10, T est au dessus de $\mathcal{C}$.

Solution: Pour savoir si T est au dessus de $\mathcal{C}$, il faut que d soit positive.

On va utiliser la tableau de variation trouvé dans la question précédente et on refait le même raisonnement que lors de l'introduction de ce chapitre pour déterminer le tableau de signe de d.

On commence par calculer $d(5)$

$$d(5) = 5\times(-5+2) = 5\times(-3) = -15$$

Donc $d(5)$ est négatif. D'après le tableau de variation, la fonction est décroissante sur $[2\,;+\infty[$ donc sur $[5\,;10]$ donc toutes les valeurs prisent par $d(x)$ quand x est dans l'intervalle $[5\,;10]$ sont négatives (plus petite que $d(5)=-15$). Donc sur cet intervalle $f(x)$ est plus grand que $-8x-1$ (l'équation de la tangente). Donc $\mathcal{C}$ est au dessus de T.

Exercice 3 — 5 points

Dans cette question tout élément de réponse ou début de raisonnement sera valorisé.

Un élève affirme que "L'ensemble des solutions de $-3x^2 + 4x + 4 \geq 0$ est $]-0,7\,;2]$".
Commenter cette affirmation en prenant soin de justifier ce qui est vrai et de corriger ce qui est faux.

Solution:

- On remarque une première erruer dans la forme de l'intervalle. L'inégalité est large donc les valeurs extrèmes de l'intervalles sont aussi solutions. Ce devrait donc être $[-0,7\,;2]$ plutôt que $]-0,7\,;2]$.
- Pour résoudre cette cette inéquation, on fait le tableau de signe de la fonction $fx \mapsto -3x^2+4x+4$. C'est un polynôme du 2nd degré on utilise la méthode du discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-3) \times 4 \\ &= 16 - 48 \\ &= 642 - 4 \times (-3) \times 4 \\ &= 16 - 48 \\ &= 64\end{aligned}$$

Δ est positif donc ce polynôme a 2 racines

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{64}}{2\times(-3)} = \frac{-4-8}{-6} = 2 \\ x_12 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{64}}{2\times(-3)} = \frac{-4+8}{-6} = \frac{-2}{3}\end{aligned}$$

Ici $a = -3$ négatif on en déduit le tableau de signe suivant

x	$-\infty$		$\frac{-2}{3}$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'affirmation de l'élève est fausse car l'ensemble des solutions de cette équation correspond à la partie du tableau où il y a des $+$. Le bon ensemble solution est alors $\left[\frac{-2}{3}\,;2\right]$.