Cours: Répétition d'expériences

Première S 2 – Novembre 2014

1 Répétition d'expériences

Définition: Deux expériences aléatoires sont dites **indépendantes** si le résultat de l'une n'a aucune influence sur le résultat de l'autre.

Exemples: Tirage avec ou sans remise

Remarque: La répétition d'expériences aléatoires se représente le plus souvent avec un arbre pondéré. Avec sur le noeud des branches les issues et sur les branches les probabilités correspondantes.

Exemples: Pièces défaillantes
Exo asso 7 8 9 p 295

Propriété: Dans un arbre pondéré repésentant la répétition d'expériences, la probabilités d'une feuille est le produit des probabilités des branches depuis la racine.
Exo asso 10 11 p 295

2 Variable de Bernoulli

La variable aléatoire de Bernoulli est une variable aléatoire "type" qui permet de modéliser les situations de succès-échecs ou vrai-faux. On appelle ce genre d'expérience des épreuves de Bernoulli. **Définition:** Si X une variable aléatoire qui suit une **loi de Bernoulli de paramètre** p, alors ça loi de probabilité est

Valeur de X	0 (échec)	1 (succès)
Probabilité	1-p	p

Exemples:

- On lance un dé non truqué. X vaut 1 si le dé s'arrête sur 6, 0 sinon. Alors X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$.
- Dans une entreprise, il y a 60% de femmes. On choisit au hasard une personne dans cette entreprise et on s'intéresse au fait que ce soit une femme ou pas. X vaut 1 si c'est une femme, 0 sinon. Alors X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0.6$

Propriété: Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p alors

- $E[X] = p$
- $V(X) = p(1-p)$

3 Schéma de Bernoulli

Définition: L'expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p est appelé **schéma de Bernoulli de paramètre n et p**.

Exemples: On choisit au hasard 10 personnes dans l'entreprise de l'exemple précédent. On estime qu'il y a suffisamment d'employés dans cette entreprise pour que le choix soit considéré comme un tirage avec remise. Cette expérience est donc un schéma de Bernoulli de paramètre 10 et 0.6.
Exo asso 12 13 14 p 295

Définition: La loi de probabilité de la variable aléatoire X égale que nombre de succès au cours des n épreuve de Bernoulli se nomme **loi de Bernoulli de paramètre n et p**. On la note $\mathcal{B}(n, p)$.
Exo asso p397 autre bouquin

4 Coefficient binomial

Définition: Soit n un entier naturel non nul, k un entier compris entre 0 et n.

Le **coefficient binomial** $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ est le nombre de chemin réalisant k succès pour n répétitions sur l'arbre d'un schéma de Bernoulli.

Exemples: On fait le calcul à la main pour des premiers cas simples.

Propriété: Soit n un entier naturel non nul, k un entier compris entre 0 et n.

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$$

Démonstration: Compter k échecs revient à compter $n-k$ succès.

△

Regarder 23p296 avant de faire cette propriété.

Propriété: Soit n un entier naturel non nul, k un entier compris entre 0 et $n-1$.
La **formule de Pascale :**

$$\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix}$$

Démonstration: Le dernier élément est soit E soit S...
△

Propriété: **Triangle de Pascal.**

Exemples: Calcul des coefficients à partir du triangle

Exemples: Calcul des coefficients avec la calculatrice.

5 Loi binomiale

Propriété: Soit X une variable aléatoire suivant $\mathcal{B}(n, p)$ alors pour tout k entier compris entre 0 et n, on a

$$P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (n-p)^{n-k}$$

Exemples: Un couple de vaches compte les voitures rouge au bord de la route. X la variable aléatoire comptant le nombre de voiture rouge. On suppose que X suit une $\mathcal{B}(100, 0, 3)$. Alors la probabilité pour qu'elles aient vue 40 voitures rouge est de

$$P(X = 40) = \begin{pmatrix} 100 \\ 40 \end{pmatrix} \times 0.3^{40} \times (1-0.3)^{100-40}$$

On voit avec la calculatrice comment calculer $\begin{pmatrix} 100 \\ 40 \end{pmatrix}$

Propriété: Soit X suit une $\mathcal{B}(n, p)$ alors

$$\begin{aligned} E[X] &= np \\ V(X) &= np(1-p) \end{aligned}$$