

1 Variable aléatoire

Définition: Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

Définir une variable aléatoire X sur Ω , c'est associer à chacune des issues de Ω un réel.

Exemples: On tire au hasard une boule dans une urne constituée de 3 boules bleu, 5 boules verte, 9 boules jaune et 1 boule rouge.

- Une boule bleu rapporte 10
- Une boule verte rapporte 1
- Une boule jaune rapporte 1
- Une boule rouge rapporte -4

On fait le dessin

Définition: Soit X une variable aléatoire. Définir une loi de probabilité de X c'est associer à chacune des valeurs prise par X un nombre $P(X = x)$ compris entre 0 et 1 tel que la somme de tous ces nombres soit égale à 1.

Exemples: Loi de probabilité pour l'exemple en question.

Représentation graphique de la loi -> diagramme bâtons

Définition:

- L'évènement $\{X = x\}$, où x est un réel, est l'ensemble des issues de Ω auxquels ont a associé la valeur x .
- L'évènement $\{X \geq x\}$, où x est un réel, est l'ensemble des issues de Ω auxquels ont a associé une valeur supérieur ou égale à x .
- L'évènement $\{X \leq x\}$, où x est un réel, est l'ensemble des issues de Ω auxquels ont a associé une valeur supérieur ou égale à x .

Exemples: On reprend l'exemple en détaillant quelques évènements et les probabilités associées.

2 Espérance, variance et écart-type

Exemples: Activité autour des barèmes d'un QCM.

Définition: Soit X une variable aléatoire de loi de probabilité

Valeurs	x_1	x_2	...	x_n
Proba	p_1	p_2	...	p_n

L'espérance de X est la moyenne des gains pondérées par leur probabilité. Elle se calcule de la manière suivante

$$E[X] = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Exemples: Exemple de calcul simple

Remarque: Gain espérable si l'on joue de nombreuses fois.

Définition: Un jeu aléatoire est dit **équitable** quand son espérance est nulle.

Définition: Soit X une variable aléatoire de loi de probabilité

Valeurs	x_1	x_2	...	x_n
Proba	p_1	p_2	...	p_n

La variance de X est le nombre réel

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E[X])^2 \times p_i$$

L'écart type de X est le nombre réel

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Propriété:

$$V(X) = E[(x - E[X])^2]$$

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

Démonstration: .

△

Propriété: Soient a et b deux réels, alors

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

$$V(aX) = a^2V(X)$$

Démonstration: .

△