Cours: Généralités sur les suites

Première S 2 – Mai 2015

1 Généralité sur les suites

Définition: Une suite numérique est un liste infinie de nombres réels, numérotés généralement avec des entiers naturelles (0, 1, 2, 3 ...) consécutifs.

Exemples:

- On note u_n la taille d'une personne à son n-ième anniversaire.

$$
\begin{aligned}
u_0 &= 50cm \text{ taille à la naissance} \\
u_1 &= 85cm \text{ taille pour son premier anniversaire} \\
u_{17} &= 180cm \text{ taille pour son 17-ième anniversaire}
\end{aligned}
$$

- On connait les suites arithmétiques : pour passer d'une terme au suivant, on ajoute toujours la même quantité.
- On connait les suites géométrique : pour passer d'une terme au suivant, on multiplie toujours par la même quantité.

Deux façons de générer "classique" une suite

- **Explicitement** : quand pour calculer la valeur de u_n on n'a besoin que de la valeur de n **Exemples:** Soit $u_n = -n^2 + 3^n - 5$ pour calculer les termes u_1 et u_{10} il suffit de remplacer n par sa valeur.

$$
\begin{aligned}
u_1 &= -1^2 + 3^1 - 5 = -3 \\
u_{10} &= -10^2 + 3^{10} - 5 = 58944
\end{aligned}
$$

- **Par récurence** : pour calculer un terme, il faut connaître les termes précédents. **Exemples:**
  — Soit $u_{n+1} = 2^{u_n}$ avec $u_0 = 1$ on calcule les premiers termes de la suite

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 2^{u_0} = 2^1 = 2 \\
u_2 &= 2^{u_1} = 2^2 = 4 \\
u_3 &= 2^{u_2} = 2^4 = 16
\end{aligned}
$$

  — Soit $u_{n+1} = u_n + n^2$ avec $u_0 = 2$ on calcule les premiers termes de la suite

$$
\begin{aligned}
u_1 &= u_0 + 0^2 = 2 \\
u_1 &= u_1 + 1^2 = 2 + 1^2 = 3 \\
u_2 &= u_2 + 2^2 = 3 + 4 = 7
\end{aligned}
$$

  — (Suite de Fibonacci) Soit $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ on calcule les premiers termes de la suite

$$
\begin{aligned}
u_2 &= u_1 + u_0 = 1 + 1 = 2 \\
u_3 &= u_2 + u_1 = 2 + 1 = 3 \\
u_4 &= u_3 + u_2 = 3 + 2 = 5
\end{aligned}
$$

Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique

- Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, on calcule l'écart entre deux termes consécutifs : $u_{n+1} - u_n$. Si cet écart ne dépend pas de n alors la suite est arithmétique.
- Pour démontrer qu'une suite est géométrique, on calcule quotient de deux termes consécutifs : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Si ce quotient ne dépend pas de n alors la suite est géométrique.

2 Variation d'une suite

Définition: Soit (u_n) une suite numérique.

- (u_n) est **croissante** ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} \geq u_n$
- (u_n) est **décroissante** ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} \leq u_n$
- (u_n) est **constante** ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} = u_n$

Méthodes

- Si la suite est définie explicitement c'est à dire $u_n = f(n)$ alors (u_n) a les mêmes variations que $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$

  Exemples: Soit $u_n = n^2 + 1$. Cette suite est de la forme $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 + 1$. On va donc étudier les variations de f

  $$f'(x) = 2x \qquad\qquad f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

  Donc $f'(x)$ est positif quand x est positif. On en déduit que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et donc que la suite (u_n) est croissante.

- Si l'expression de u_n contient essentiellement des additions ou des soustractions. Alors on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

  Exemples: Soit $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 10$.

  $$u_{n+1} - u_n = u_n^2 + u_n + 10 - u_n = u_n^2 + 10 > 0$$
  $$\text{Donc } u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$$

  La suite (u_n) est donc strictement croissante.

- Si l'expression de u_n contient essentiellement des multiplication ou des divisions et que u_n n'est **jamais nulle**. Alors on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

  Exemples: Soit $u_n = 5^n \times n$, donc $u_{n+1} = 5^{n+1} \times (n+1)$

  $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1} \times (n+1)}{5^n \times n} = 5 \times \frac{n+1}{n} > 5 > 1$$

  Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ donc $u_{n+1} > u_n$ donc la suite est croissante.