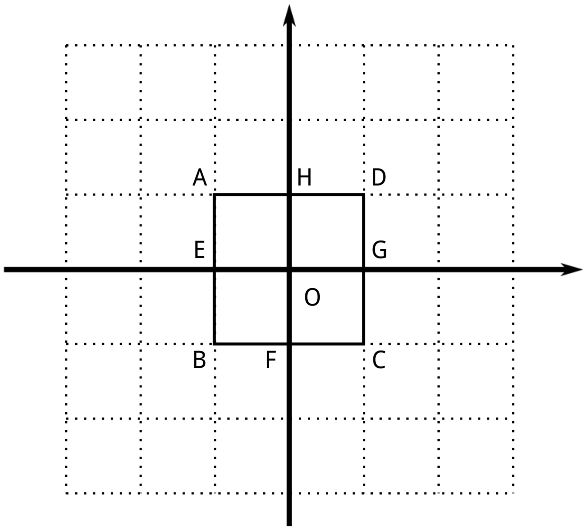
Devoir surveillé: DS 4

Première S 2 – 15 décembre 2014 – Durée : 1 heure

Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.

Exercice 1 — 5 points



$ABCD$ est un carré de centre O. Les points E, F, G et H sont les milieux respectifs des cotés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$.

1. Citer deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$.

   Solution: Deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{DC}$.

2. Donner un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{EH}$ mais qui ne lui soit pas égal.

   Solution: $\overrightarrow{BD}$ est un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{EH}$ car il a la même direction mais pas la même norme.

3. En laissant les traits de construction, placer le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BG} - \overrightarrow{EH} + 3\overrightarrow{GC}$.

4. On suppose que l'origine du repère est O et que D a pour coordonnées $(1; 1)$.

   a. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{ED}$

   Solution: Coordonnée de $\overrightarrow{ED}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ED} &= \begin{pmatrix} x_D - x_E \\ y_D - y_E \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 1-0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   b. Calculer les coordonnées de M.

Solution:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{EH} + 3\overrightarrow{GC} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2-1+3\times 0 \\ 1-1+3\times(-1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc quand on fait subir la transformation $\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{EH} + 3\overrightarrow{GC}$ au point A, on obtient les coordonnées sur points M :

$$\begin{aligned}
x_M &= x_A + 1 = -1 + 1 = 0 \\
y_M &= y_A - 3 = 1 - 3 = -2
\end{aligned}$$

Les coordonnées de M sont alors $(0; -2)$.

Exercice 2 — 4 points

Soit f la fonction $f : x \mapsto -4x^2 + 5x - 12$

1 En passant par la dérivée, tracer le tableau de variation de f.

Solution: Calcul de la dérivé de f

$$f'(x) = -4 \times 2 \times x + 5 + 0 = -8x + 5$$

On cherche les valeurs de x tels que f' soit positive

$$\begin{aligned}
f'(x) > 0 &\Leftrightarrow -8x + 5 > 0 \\
&\Leftrightarrow -8x > -5 \\
&\Leftrightarrow x > \frac{5}{8}
\end{aligned}$$

Car -8 est négatif donc on a changé le sens de l'inégalité.
Ici a est négatif donc les branches sont orientées vers le bas.

x	$-\infty$		$\frac{5}{8}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{-167}{16}$	$\searrow$	

$$\begin{aligned}
f(\frac{5}{8}) &= -4 \times \left(\frac{5}{8}\right)^2 + 5 \times \frac{5}{8} - 12 \\
&= \frac{-668}{64} = \frac{-167}{16}
\end{aligned}$$

2 Combien de solution l'équation $f(x) = 0$ a-t-elle ?

Solution: D'après le tableau de variations de la question précédente, on remarque que la maximum de f est un nombre négatif. Donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solutions.

Exercice 3 — 8 points

Un élève se rend à vélo au lycée distant de 3km de son domicile à une vitesse constante de 15km/h. Sur son parcours, il rencontre 6 feux tricolores non synchronisés. Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit au vert est de $\frac{2}{3}$ et celle qu'il soit à l'orange ou au rouge est de $\frac{1}{3}$. Un feu rouge ou orange lui font perdre une minute et demi.

On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés par l'élève sur son parcours.
On appelle T la variable aléatoire donnant le temps en minutes mis par l'élève pour se rendre au lycée.

1 a. Déterminer la loi de probabilité de X. Justifier.

Solution: X suit une loi binomiale de paramètre 6 et $\frac{2}{3}$. En effet, chaque feu correspond à un épreuve de Bernouilli avec comme succès que le feu soit vert avec probabilité $\frac{2}{3}$. Chacune de ces expériences sont indépendantes (les feux ne sont pas synchronisés). Et on la répète 6 fois.

b. Est-ce que T suit une loi binomiale ? Justifier.

Solution: T ne suit pas une loi binomiale car elle mesure un temps et ne compte pas le nombre de succès ou d'échecs.

2 a. Calculer la probabilité qu'il rencontre exactement 4 feux verts.

Solution: Probabilité d'avoir exactement 4 feux verts :

$$\begin{aligned} P(X=4) &= \binom{6}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ &\approx 0.33 \end{aligned}$$

La probabilité qu'il ai exactement 4 feux vert est de 0,33.

b. Combien de temps mettra-t-il alors pour aller au lycée ?

Solution: 15km/h correspond à 15 : 60 $= 0,25 km/min$.
Si le parcourt se fait sans rencontrer de feu rouge (temps minimal de trajet pour parcourir les 3km)

$$\frac{3}{0,25} = 12min$$

Donc s'il rencontre 4 feux vert soit 2 feux rouges ou oranges

$$12 + 2 \times 1,5 = 15min$$

Il mettra 15 minutes s'il rencontre 2 feux rouges ou oranges.

3 a. Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat.

Solution: Espérance de X : Comme X suit une loi binomiale de paramètres 6 et $\frac{2}{3}$, on a

$$E[X] = 6 \times \frac{2}{3} = 4$$

En moyenne, il rencontrera 4 feux verts.

b. Exprimer T en fonction de X.

Solution: D'après la question 2.b, s'il ne rencontre pas de feux rouges ou orange il met 12 minutes. Chaque feu rouge rencontré lui fait perdre 1,5minutes de plus. Donc

$$\begin{aligned} T &= 12 + (6 - X) \times 1,5 \\ T &= 12 + 9 - 1,5X \\ T &= 21 - 1,5X \end{aligned}$$

c. Calculer l'espérance de T. Interpréter le résultat.

Solution: Espérance de T :

$$\begin{aligned} E[T] &= 21 - 1,5 \times E[X] \\ E[T] &= 21 - 1,5 \times 4 \\ E[T] &= 21 - 6 = 15 \end{aligned}$$

Il mettra en moyenne 15 minutes pour aller au lycée.

4 L'élève part 17 minutes avant le début des cours. Quelle est la probabilité qu'il arrive à l'heure ?

Solution: S'il y a que 2 feux verts, son parcours durera 18 minutes. S'il en a 3, son parcours durera 16,5min. Donc il sera en retard, dès que $X \leq 2$.

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\ &= 0,1 \end{aligned}$$

Il a environ une chance sur 10 d'arriver en retard.

Exercice 4 — 3 points

On suppose que $\binom{6}{2} = 15$. Vous répondrez aux questions suivantes sans utiliser la calculatrice.

1 Détailler le calcul de $\binom{6}{4}$ en rappelant la formule utilisée.

Solution: On utilise la formule : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Donc

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{6-4} = \binom{6}{2} = 15$$

2 a. Combien vaut $\binom{6}{1}$.

Solution: D'après le cours

$$\binom{6}{1} = 6$$

b. Détailler le calcul de $\binom{7}{2}$ en rappelant la formule utilisée.t

Solution: On utilise la formule de Pascale : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.
Donc en remplaçant n par 6 et k par 1 on obtient

$$\binom{7}{2} = \binom{6}{1} + \binom{6}{2} = 6 + 15 = 21$$