Devoir maison: 2

Terminale STMG – À rendre le 2 février 2015

Exercice 1

Sujet B p 196 du livre

Solution:

1. La probabilité pour que la production soit conforme :

$$P(56,2 < X < 57,2) = 0,9044$$

On le calcule avec la calculatrice en tapant

```
normalFrep(56.2, 57.2, 56.7, 0.3)
```

2. Probabilité pour que la production ne soit pas conforme

$$1 - P(56,2 < X < 57,2) = 1 - 0,9044 = 0,0956$$

3. (a) c et d doivent être les bornes de l'intervalle à 95% donc

$$\begin{aligned} c &= \mu - 2\sigma = 56,7 - 2 \times 0,3 = 56,1 \\ d &= \mu + 2\sigma = 56,7 + 2 \times 0,3 = 57,3 \end{aligned}$$

   (b) Non, ils ne seront pas tous conformes car ceux qui mesureront 56,1 (la borne inférieur de l'intervalle) ne sont pas conformes.

4. On veut que 95% de la production soit dans l'intervalle $[56,2\,;57,2]$ donc

$$\begin{aligned} 2\sigma &= 56,7 - 56,2 = 0,5 \\ \sigma &= 0,25 \end{aligned}$$

L'écart-type devra donc être de 0,25

Exercice 2

Au cours d'une épidémie virale on a relevé chaque semaine le nombre, exprimé en milliers, de personnes contaminées. Le tableau ci-dessous rend compte de cette enquête sur une période de 10 semaines.

Semaine (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de cas en milliers (y_i)	2	5	7	15	30	33	50	68	79	92

Partie A

1. Représenter le nuage des points $M_i\,(x_i\ ;\ y_i)$ associé à la série statistique ci-dessus.
   (unités graphiques : 1 cm pour 1 semaine en abscisse, 1 cm pour 10 milliers de personnes en ordonnée).
   Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de ce nuage par la méthode des moindres carrés, en arrondissant les coefficients au millième.

Solution: note(Mettre l'image du tableau)
D'après le tableur (vous pouvez le faire avec la calculatrice) l'équation de la droite d'ajustement est

$$y = 10,552x - 19,933$$

2. En utilisant ce modèle, prévoir le nombre, arrondi au millier, de personnes contaminées à la 14^{e} semaine.

Solution: Nombre de cas pour la 14ième semaine (x=14)

$$10,552 \times 14 - 19,933 \approx 128$$

On attend donc 128 miliers de cas la 14ième semaine.

Partie B

1. Calculer le taux d'évolution, exprimé en pourcentage et arrondi au dixième, du nombre de personnes contaminées entre la 8^{e} et la 10^{e} semaine.

Solution: Taux d'évolution entre la 8^{e} et la 10^{e} semaine

$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_2} = \frac{92-68}{68} = 0,353 = 35,3\%$$

2. Calculer le taux d'évolution hebdomadaire moyen, exprimé en pourcentage et arrondi au dixième, du nombre de personnes contaminées sur cette même période.

Solution: Taux d'évolution hebdomadaire moyen : note(Faire un dessin)

$$\begin{aligned} 1+\frac{35,5}{100} &= (1+t_m)^2 \\ 1+t_m &= \sqrt{1,353} \\ t_m &= (1,353)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,163 = 16,3\% \end{aligned}$$

3. On suppose que, à partir de la 10^{e} semaine, le nombre de personnes contaminées augmente chaque semaine de 16,3%.

(a) Calculer le nombre, arrondi au millier, de personnes contaminées à la 11^{e} semaine.

Solution: Nombre de contaminé la 11^{e} semaine

$$92 \times (1+\frac{16,3}{100}) = 107$$

(b) Calculer, en utilisant ce modèle, le nombre arrondi au millier de personnes contaminées à la 14^{e} semaine.

Solution: Entre la 10^{e} et la 14^{e} année il s'est écoulé 4 année donc

$$92 \times (1+\frac{16,3}{100})^4 = 168$$

Partie C

En réalité le nombre de cas relevés à la 14^{e} semaine a été égal à 152000.

1. Expliquer pourquoi on aurait pu prévoir, à l'aide du nuage de points, l'écart entre l'estimation obtenue à la partie A et le nombre réel de personnes contaminées à la 14^{e} semaine.

Solution: Si on observe le nuage de points, on observe que les points ne sont pas sur une droite. Le nuage de point ressemble aux termes d'une suite géométrique (n'augmente pas beaucoup au début puis augmente de plus en plus vite). Le modèle A avec une droite d'ajustement n'était pas pertinent.

2. Le modèle utilisé à la partie B donne-t-il une meilleure estimation du nombre réel de personnes contaminées à la 14^{e} semaine que celui de la partie A ?

Solution: Le modèle B donne de meilleurs résultats que le modèle A. En effet, si on fait la différence entre les prévisions et la réalité pour les deux modèles, le modèle B est meilleur que le A.

- Écart avec la réalité pour le modèle A : $152000 - 128000 = 24000$
- Écart avec la réalité pour le modèle B : $152000 - 168000 = -16000$

Exercice 3

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

D'après l'INSEE, l'espérance de vie à la naissance est passée pour les hommes de 59,9 ans en 1946 à 78,5 ans en 2012. Pour les femmes, elle est passée de 65,2 ans à 84,9 ans durant la même période.

Première partie

On se propose ici de modéliser l'évolution de l'espérance de vie pour les hommes par la suite arithmétique (U_n) de premier terme $U_0 = 59,9$ et de raison $r = 0,25$.

1. Calculer U_1, U_2 et U_3 qui correspondent aux années 1947, 1948 et 1949.

Solution:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_0 + r = 59,9 + 0,25 = 60,15 \\ U_2 &= U_1 + r = 60,15 + 0,25 = 60,40 \\ U_3 &= U_2 + r = 60,40 + 0,25 = 60,65 \end{aligned}$$

2. Donner U_n en fonction de n.

Solution: On demande la formule explicite de la suite U_n

$$U_n = U_0 + n \times r = 59,9 + n \times 0,25$$

3. Déterminer U_{66}.

Solution: Calcul de U_{66}

$$U_{66} = 59,9 + 66 \times 0,25 = 76,4$$

4. Entre 1946 et 2012 les hommes ont-ils gagné, en réalité, plus de 3 mois d'espérance de vie chaque année en moyenne ?

Solution: D'après la question précédente, s'ils avaient gagné 3mois d'espérance de vie par an, l'espérance de vie serai de 76,4 ans alors qu'elle est de 78,5 ans. Ils ont en réalité gagné plus de 3mois par an.

Deuxième partie

1. Déterminer, à 10^{-2} près, le taux d'évolution global de l'espérance de vie pour les hommes exprimé en pourcentage de 1946 à 2012.

Solution: Taux d'évolution de l'espérance des hommes de 1946 à 2012

$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_2} = \frac{78,5 - 59,9}{59,9} = 0,3105 = 31,05\%$$

2. Des hommes ou des femmes, qui a le taux d'évolution global le plus élevé durant cette période ?

Solution: Taux d'évolution de l'espérance des femmes de 1946 à 2012

$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_2} = \frac{84,9 - 65,2}{65,9} = 0,3021 = 30,21\%$$

Les hommes ont au taux d'évolution plus élevé que les femmes sur cette période.

3. Calculer pour les hommes le taux annuel moyen, pour cette période, exprimé en pourcentage à 10^{-2} près.

Solution: Entre 1946 et 2012, il s'est écoulé 66ans donc

$$\begin{aligned} (1+t_m)^{66} &= 1+0,3105 \\ t_m &= (1+0,3105)^{\frac{1}{66}}-1 = 0,0041 = 0,41\% \end{aligned}$$

Chaque année, il y a eu en moyenne une augmentation de 0,41%.

Troisième partie

Soit l'algorithme suivant :

VARIABLES

n EST DU TYPE NOMBRE

A EST DU TYPE NOMBRE

B EST DU TYPE NOMBRE

T EST DU TYPE NOMBRE

DÉBUT ALGORITHME

AFFICHER ≪ Entrez la valeur initiale ≫.

ENTRER A

AFFICHER ≪ Entrer le nombre d'années ≫

ENTRER n

AFFICHER ≪ Entrez la valeur finale ≫

ENTRER B

T PREND LA VALEUR $(B-A)/A$

T PREND LA VALEUR $(1+T)^{\frac{1}{n}}$

T PREND LA VALEUR $(T-1)\times 100$ AFFICHER T

FIN ALGORITHME

1. Que calcule cet algorithme ?

Solution: Cet algorithme calcule le taux d'évolution moyenne en connaissant la valeur initiale, la valeur finale et le nombre d'années écoulées.

2. Si on choisit : $A = 65,2$; $B = 84,9$; $n = 66$, quel sera le résultat affiché à 10^{-2} près ?

Solution: On applique l'algorithme pour ces valeurs

$$\begin{aligned} T &= \frac{B-A}{A} = \frac{84,9-65,2}{65,2} = 0,3021 \\ T &= (1+0,3021)^{\frac{1}{66}} = 1,0040 \\ T &= (1,0040-1)\times 100 = 0,40 \end{aligned}$$

L'algorithme affichera donc 0,40.