Séquence 7

Configuration du plan et de l'espace

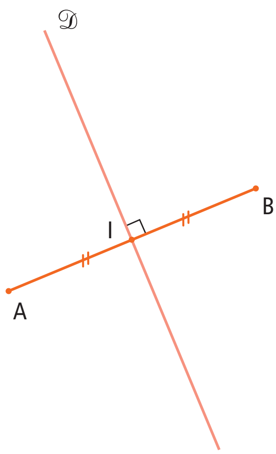
Sommaire

© Cned – Académie en ligne

1 Prérequis

A Médiatrice

Définition



Définition

Soient A et B deux points du plan. La médiatrice $\mathscr{D}$ du segment [AB] est la perpendiculaire à la droite (AB) passant par le milieu I de [AB].

Propriété (admise) :

- **La médiatrice de [AB] est l'ensemble des points équidistants à A et à B, c'est-à-dire l'ensemble des points M du plan tels que : AM = BM.**
- **La médiatrice de [AB] est l'axe de l'unique symétrie axiale transformant A en B.**

B Les triangles

❶ Triangles isocèles, équilatéraux, rectangles

Définitions

Soit un triangle ABC.

- **Ce triangle est un triangle isocèle de sommet A si : AB = AC.**
- **Ce triangle est un triangle équilatéral si :**

AB = AC = BC.

- **Ce triangle est un triangle rectangle de sommet A si : (AB) $\perp$ (AC) (le côté [BC] est alors l'hypoténuse du triangle ABC).**

Propriété

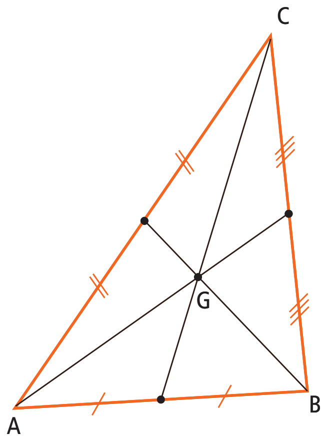
Le triangle ABC est un triangle isocèle de sommet A si et seulement si : $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

© Cned – Académie en ligne

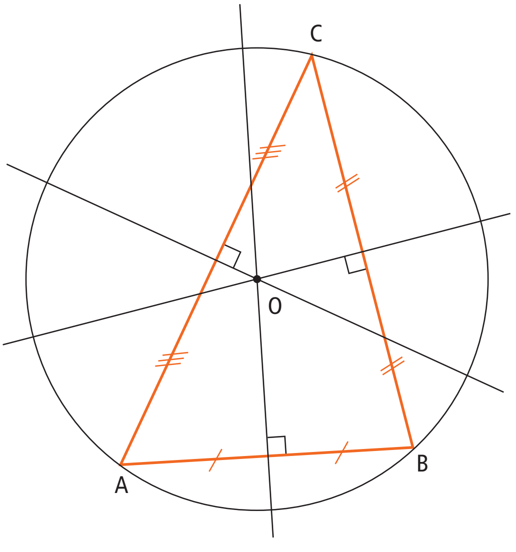
❷ Droites remarquables dans un triangle

À savoir

Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point que l'on appelle **centre de gravité** du triangle (G ci-contre).



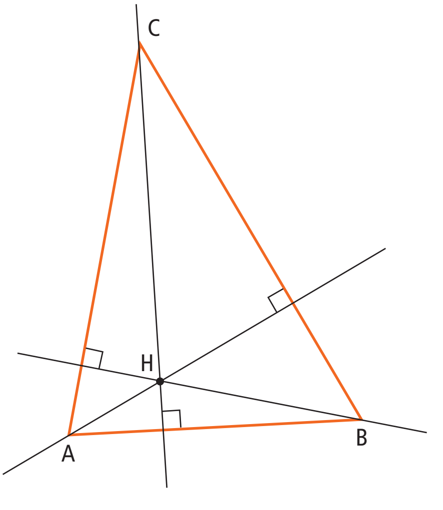
Les médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point que l'on appelle **centre du cercle circonscrit** au triangle (O ci-dessous).

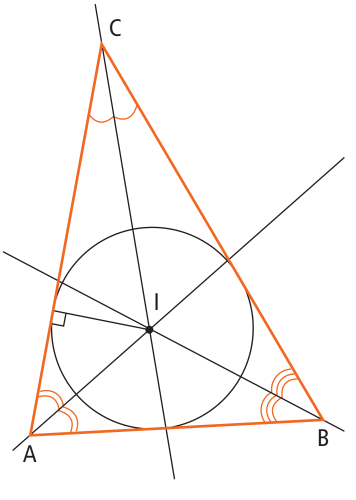


Remarque

Les médiatrices d'un triangle équilatéral sont ses axes de symétrie.

Les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point que l'on appelle **orthocentre** du triangle (H ci-contre).





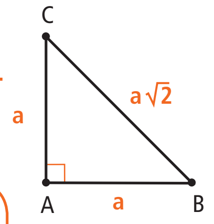
Les bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point que l'on appelle **centre du cercle inscrit** au triangle (I ci-contre).

© Cned – Académie en ligne

❸ Exemples utiles à retenir

Exemple A

Si ABC est un triangle rectangle isocèle tel que AB = AC = ***a***.
Alors BC = $a\sqrt{2}$



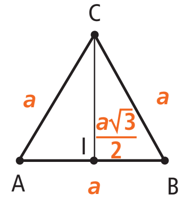
Remarque

C'est une conséquence du théorème de Pythagore :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

Exemple B

Si ABC est un triangle équilatéral de côté ***a*** alors les hauteurs de ABC ont pour longueur $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Remarque

C'est une conséquence du théorème de Pythagore :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

C Les quadrilatères

Définitions

Un rectangle est un quadrilatère ayant 4 angles droits.

Propriétés : Caractéristiques

Soit ABCD un quadrilatère.

ABCD est un rectangle si et seulement si il a 3 angles droits

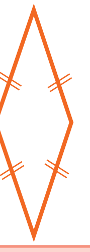
si et seulement si c'est un parallélogramme ayant 1 angle droit

si et seulement si c'est un parallélogramme ayant ses diagonales de même longueur.

© Cned – Académie en ligne

Définition

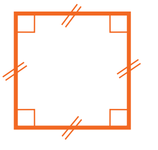
Un losange est un quadrilatère ayant ses 4 côtés égaux.



Propriétés : Caractéristiques
Soit ABCD un quadrilatère.
ABCD est un losange si et seulement si c'est un parallélogramme ayant ses diagonales perpendiculaires.

Définition

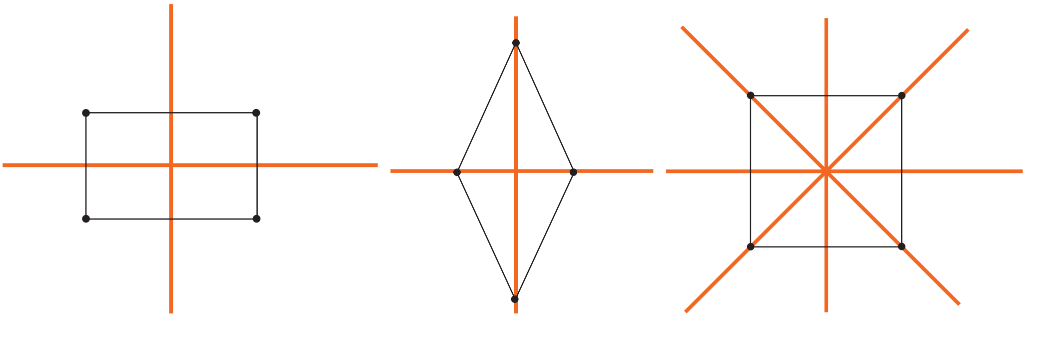
Un carré est un quadrilatère ayant ses 4 côtés égaux et ses 4 angles droits.



Propriétés : Caractéristiques
Soit ABCD un quadrilatère.
ABCD est un carré si et seulement si c'est un parallélogramme dont les diagonales sont médiatrices l'une de l'autre.

Remarque

Un rectangle admet comme axes de symétries, les médiatrices de ses côtés.
Un losange admet comme axes de symétries ses diagonales.
Un carré qui est à la fois un rectangle et un losange admet 4 axes de symétrie.



© Cned – Académie en ligne

2 Les théorèmes à connaître, à savoir utiliser

A Exercices de révision

1 Introduction

Ce paragraphe a pour but de vous amener à revoir les théorèmes de géométrie étudiés au collège. Les exercices qui suivent, sont des exercices « de base », leur résolution découle directement des théorèmes.

Si vous n'arrivez pas à résoudre l'un de ces exercices, vous pouvez reprendre votre cours du collège ou consulter au fur et à mesure les résultats rappelés dans la partie B de ce chapitre.

Bien sûr, ces exercices sont corrigés dans le fascicule Devoirs.

2 Les exercices

Exercice 1 ABC est un triangle ; les bissectrices des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ se coupent en I et la parallèle à (BC) menée par I coupe (AB) en M et (AC) en N.
Montrer que le triangle BMI est isocèle.

Exercice 2 ABC est un triangle isocèle en A et $\widehat{BAC} = 36°$. La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe (AC) en D.
La bissectrice de l'angle $\widehat{BDC}$ coupe (BC) en E.
Démontrer que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

Exercice 3 ABC est un triangle rectangle en A. Le point H est le pied de la hauteur de ABC issue de A. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [HB] et [AB].
Montrer que $(IJ) \perp (AB)$.

Exercice 4 ABC est un triangle isocèle en A inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$. I est un point de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ ne contenant pas A.
Démontrer que (IA) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BIC}$.

Exercice 5 ABC est un triangle isocèle en A.
Les parallèles à (AC) passant par B et à (AB) passant par C se coupent en un point M.
Démontrer que les droites (AM) et (BC) sont perpendiculaires.

© Cned – Académie en ligne

Exercice 6 [AB] et [CD] sont deux diamètres quelconques d'un cercle $\mathscr{C}$.
Quelle est la nature du quadrilatère ACBD ?

Exercice 7 (OA) et (OB) sont deux droites, A′ est le point de (OA) tel que (A′B) $\perp$ (OA) et B′ est le point de (OB) tel que (AB′) $\perp$ (OB). On note : I = (AB′) $\cap$ (A′B).
Montrer que : (AB) $\perp$ (OI).

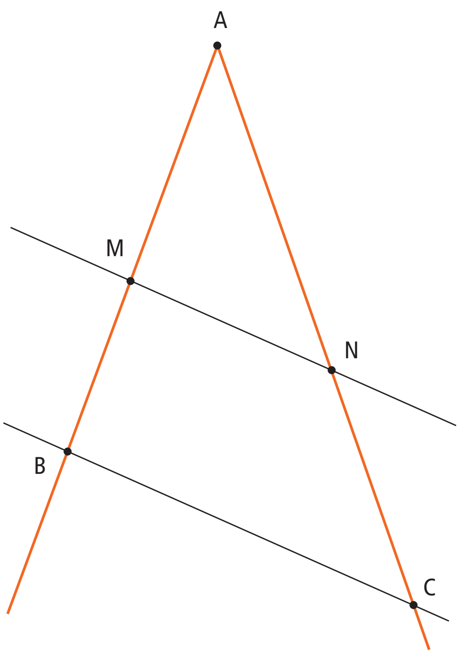
Exercice 8 Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et A un point extérieur au disque délimité par $\mathscr{C}$. Construire « à la règle (non graduée) et au compas » les tangentes à $\mathscr{C}$ passant par A.

B Cours

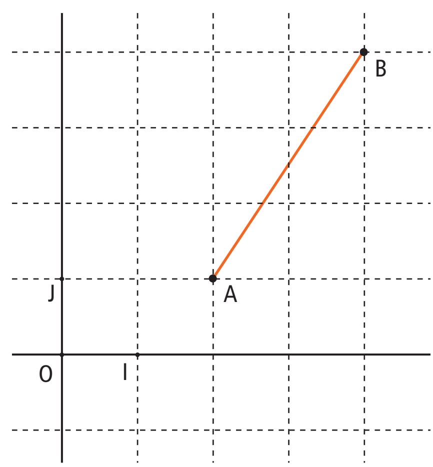
❶ Pour calculer une longueur

Pour calculer une longueur, on peut penser :

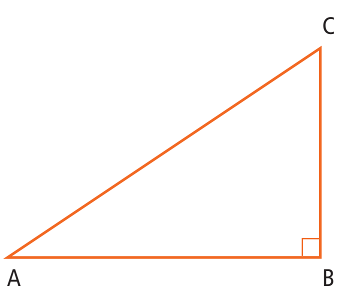
- au théorème de Thalès ;
- à se placer dans un repère orthonormé ;
- au théorème de Pythagore ;
- aux formules trigonométriques dans un triangle rectangle ;
- au théorème de la médiane.



$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$



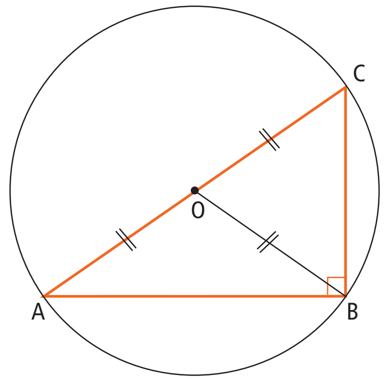
$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$



$$\sin\left(\widehat{BAC}\right)=\frac{BC}{AC}\ ;\ \cos\left(\widehat{BAC}\right)=\frac{AB}{AC}\ \text{et}\ \tan\left(\widehat{BAC}\right)=\frac{BC}{AB}$$

$$AC^2=AB^2+BC^2$$

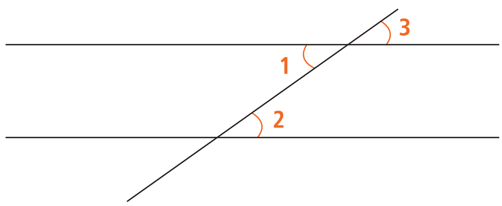
© Cned – Académie en ligne



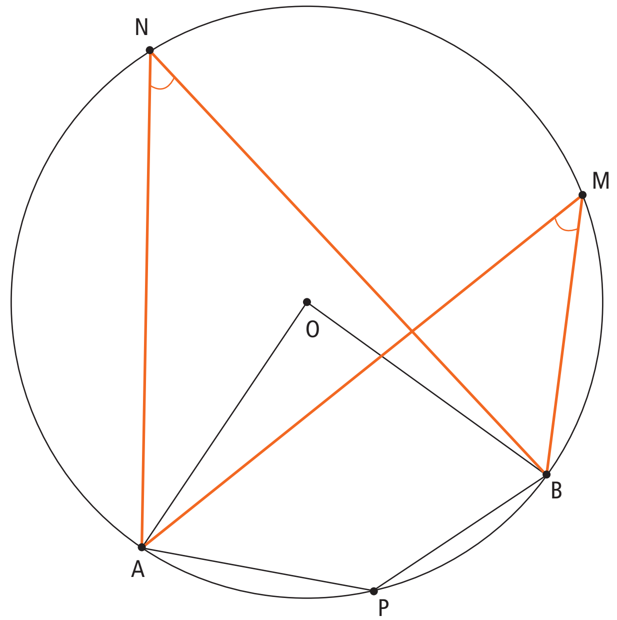
OA=OB=OC où O est le milieu de [AC]

❷ Pour calculer un angle

- Pour calculer un angle, on peut penser :
- angles alternes-internes, correspondants ;
- la somme des angles d'un triangle vaut 180° ;
- Théorème de l'angle inscrit ;
- aux formules trigonométriques dans un triangle rectangle.
- à se placer dans un repère



1 et 2 sont alternes-internes.
2 et 3 sont correspondants.
1 et 3 sont opposés par le sommet.



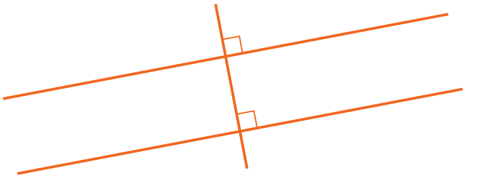
$\widehat{AMB}=\widehat{ANB}=180°-\widehat{APB}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}$

© Cned – Académie en ligne

③ Pour prouver que deux droites sont perpendiculaires

Pour prouver que deux droites sont perpendiculaires, on peut penser :

- au réciproque du Théorème de Pythagore (éventuellement dans un repère) : (si $AC^2 = AB^2 + BC^2$ alors ABC est rectangle en B) ;
- au réciproque du Théorème de la médiane (O est le milieu de [AC], si OB=OA=OC alors ABC est rectangle en A) ;
- à la propriété : si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre ;
- à l'orthocentre d'un triangle.



④ Pour montrer que deux droites sont parallèles

Pour prouver que deux droites sont parallèles, on peut penser :

- au réciproque du Théorème de Thalès : A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre, si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors (MN) // (BC) ;
- aux parallélogrammes ;
- à la colinéarité des vecteurs ;
- aux angles alternes-internes, correspondants ;
- à la géométrie repérée.

⑤ Pour montrer que 3 points sont alignés

Pour prouver que 3 points sont alignés, on peut penser :

- au parallélisme (si (AB) // (AC) alors A, B et C alignés) ;
- aux droites remarquables dans un triangle ;
- aux angles (si $\widehat{ABC} = 180°$ alors A, B et C alignés) ;

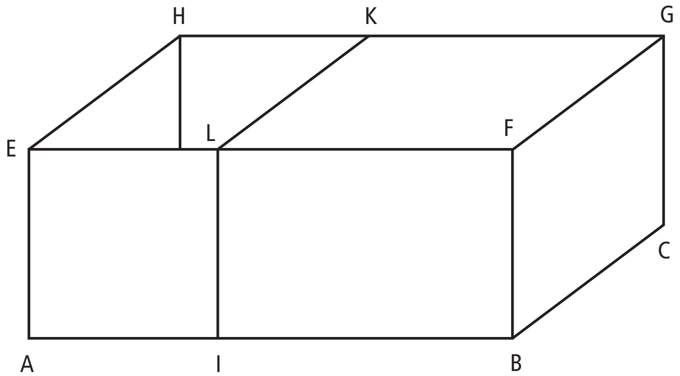
© Cned – Académie en ligne

3 Géométrie dans l'espace

A Activités

❶ Notion de points coplanaires

Activité 1 On considère le parallélépipède rectangle ci dessous pouvant représenter une boîte d'allumettes, par exemple :



Les points suivants sont-ils dans un même plan ?

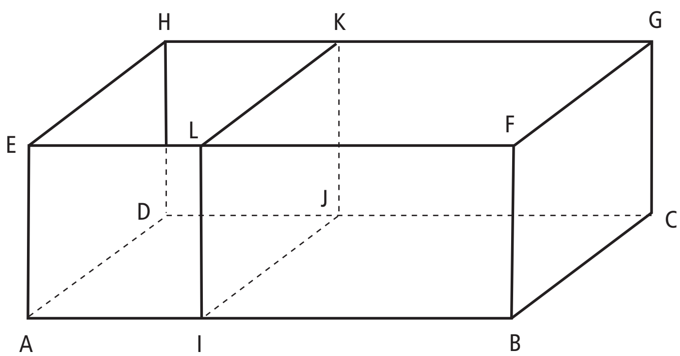
Répondre aux questions par oui ou non en regardant une telle boîte éventuellement.

EFG	ELIB	LFGC	AEGC	GCEH	GCHK	AIKG

❷ Droites dans l'espace

On retiendra de l'activité 1, qu'un plan est défini par 3 points non alignés.

Activité 2 Reprenons notre boîte d'allumettes



❶ Quel est le nombre de points communs des droites suivantes ?

(EF) et (KL) - (EL) et (BI)

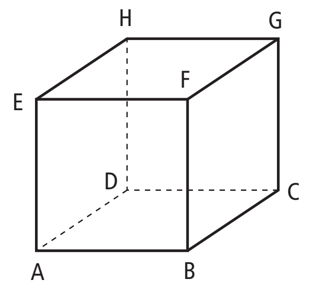
(AI) et (IB) - (EF) et (GC)

❷ Les droites (EF) et (AB) n'ont pas de points communs.

Les droites (EF) et (CB) n'en n'ont pas non plus.
Qu'est-ce qui différencie ces deux cas ?

© Cned – Académie en ligne

❸ Droites et plans de l'espace



Activité 3

Observations sur un cube

❶ Combien y a-t-il de points communs entre :

a) La droite (AC) et le plan (ABD) ?

b) La droite (AB) et le plan (EFG) ?

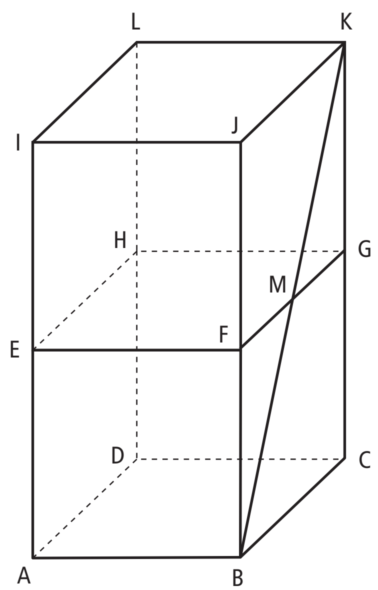
c) La droite (AC) et le plan (BCH) ?

d) La droite (AC) et le plan (BDF)

❷ Que se passe-t-il lorsqu'une droite et un plan ont deux points distincts en commun ?

Activité 4

❶ Deux plans peuvent-ils avoir exactement : un seul point commun ? deux points communs ?



❷ Considérons les deux cubes empilés ci-contre.

Les deux droites (BK) et (FG) se coupent en M.

On appelle ($\mathscr{P}$) le plan (ABK) et ($\mathscr{Q}$) le plan (EFG).

a) Montrer que le point M appartient aux deux plans ($\mathscr{P}$) et ($\mathscr{Q}$).

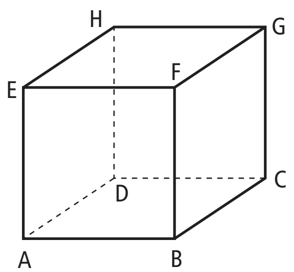
b) On appelle N le milieu du segment [EH] Montrer que ce point N appartient aux deux plans ($\mathscr{P}$) et ($\mathscr{Q}$).

c) Prouver que la droite (MN) est contenue dans chacun des deux plans ($\mathscr{P}$) et ($\mathscr{Q}$).

d) Pourquoi les deux plans ($\mathscr{P}$) et ($\mathscr{Q}$) ne peuvent-ils avoir d'autres points communs ?

B Cours

❶ Représentation des solides de l'espace



a) Perspective cavalière

On désire représenter dans un plan (sur une feuille) une figure de l'espace. Pour cela, on se donne un plan $\mathscr{P}$ (qui correspond au plan sur lequel on représente l'objet) et une droite $\mathscr{D}$ (qui représente une horizontale) de ce plan.

Alors, on définit :

- les plans frontaux : ce sont les plans parallèles à $\mathscr{P}$;

© Cned – Académie en ligne

- les droites horizontales : ce sont les droites parallèles à $\mathscr{D}$;
- les fuyantes : ce sont les droites perpendiculaires à $\mathscr{P}$.

Par exemple, si ABCDEFGH est un cube, si (ABEF) est un plan frontal et si (EF) est horizontale alors :

- le plan (CDHG) est un plan frontal ;
- les droites (AB), (CD) et (GH) sont horizontales ;
- les droites (AD), (BC), (EH) et (FG) sont des fuyantes.

Les règles de la perspective cavalière sont les suivantes.

Définition

- **Les objets des plans frontaux sont représentés en vraie grandeur ;**
- **Les fuyantes sont représentées par des droites faisant toutes le même angle avec les droites horizontales, cet angle est l'angle de fuite de la perspective ($\widehat{FEH}$ ci-dessus) ;**
- **Sur les fuyantes, les longueurs sont réduites (ou agrandies) dans un même rapport, ce rapport est le coefficient de réduction de la perspective (ci-dessus, le coefficient de réduction est : $\frac{EH}{EF}$).**

Propriétés : admises

- **Trois points alignés sont représentés par 3 points alignés.**
- **Le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment dessiné.**
- **Deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles.**
- **Un objet d'un plan frontal est représenté par un objet de même forme, c'est-à-dire, par exemple, un triangle équilatéral (ou un triangle rectangle ou un carré, …) d'un plan frontal est représenté par un triangle équilatéral (ou un triangle rectangle ou un carré, …).**

Remarque

La dernière propriété ne subsiste pas dans les plans qui ne sont pas frontaux.

© Cned – Académie en ligne

Remarque

- On note parfois PC $(r;\alpha)$ la perspective cavalière d'angle de fuite α et de coefficient de réduction r.
- Dans la pratique, on prend des coefficients de réduction : $r < 1$. Les choix les plus fréquents sont :

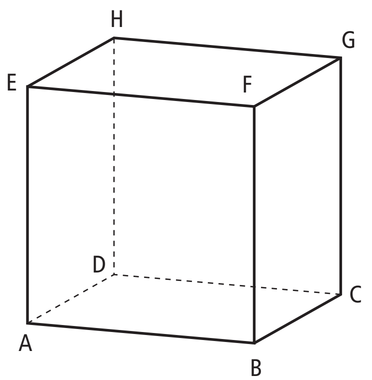
  $$\mathrm{PC}\left(\frac{1}{2};30°\right),\ \mathrm{PC}\left(\frac{1}{2};45°\right),\ \mathrm{PC}\left(\frac{1}{2};60°\right) \text{ et } \mathrm{PC}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};45°\right).$$

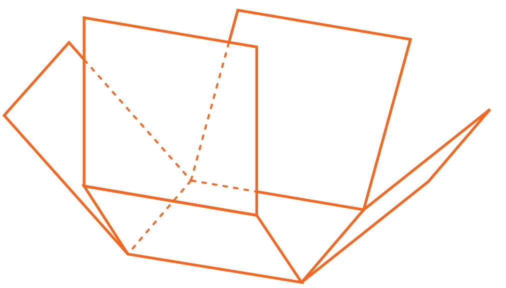
  L'Association Française de Normalisation (AFNOR) recommande d'utiliser la perspective cavalière $\mathrm{PC}\left(\frac{1}{2};45°\right)$.
- On représente, en général, les arêtes « cachées » par des traits en pointillés et les autres arêtes par des traits pleins.

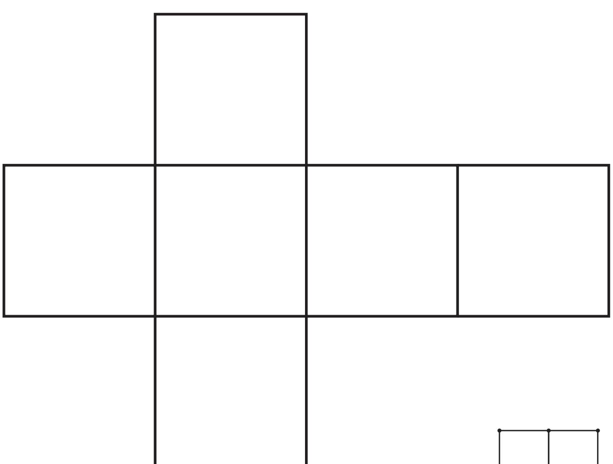
b) Patrons

Le patron d'un solide est une figure du plan représentant toutes les faces du solide et telle que l'on puisse obtenir le solide « par pliage ».

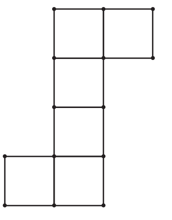
Exemple Patrons du cube







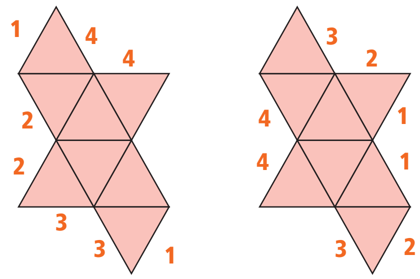
Le cube admet d'autres patrons, par exemple :



© Cned – Académie en ligne

Remarques

- Un solide peut admettre plusieurs patrons.
- Certains solides (comme la sphère) n'admettent pas de patrons.
- Une même figure peut être le patron de plusieurs solides différents. En effet, le patron ci-dessous est le patron de l'octaèdre régulier (8 faces) mais aussi d'un autre solide (ci-dessous les indications de pliages : on rapproche les arêtes ayant le même numéro).



❷ Droites et plans de l'espace

Commençons par une remarque très utile.

Remarque

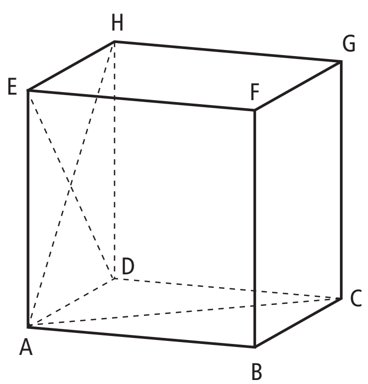
Tous les résultats de la géométrie plane s'appliquent dans tous les plans de l'espace.

a) Position relative de 2 droites

ABCDEFGH est un cube.

Deux droites de l'espace peuvent être :

- Coplanaires (dans un même plan)
  - parallèles
    - Confondues : $\mathscr{D} = \mathscr{D}'$
    - strictement parallèles (comme par exemple (DC)et (AB))
  - sécantes
    - perpendiculaires (comme par exemple (ED) et (AH))
    - quelconques (comme par exemple (HD) et (AH))
- non coplanaires (comme par exemple (EH) et (AC))



© Cned – Académie en ligne

Remarque

Dans l'espace, deux droites sans point commun ne sont pas forcément parallèles.

Définition

Deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de l'espace sont parallèles si elles vérifient les deux conditions suivantes :

- **elles sont coplanaires ;**
- **elles sont confondues ou n'ont aucun point commun.**

On note : $\mathscr{D} // \mathscr{D}'$.

Propriétés :

- **Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles ;**
- **Il n'existe qu'une seule droite parallèle à une droite donnée et passant par un point donné extérieur à cette droite.**

b) Position relative d'une droite et d'un plan :

Exemple 1 **Dans le cube précédent, déterminer :**

$(AC)\cap(EFGH)$, $(BG)\cap(EFGH)$, $(EF)\cap(EFGH)$, $(AB)\cap(EFGH)$ et $(BF)\cap(EFGH)$.

$(AC)\cap(EFGH)=\varnothing$, (2)

$(BG)\cap(EFGH)=\{G\}$, (3)

$(EF)\cap(EFGH)=(EF)$ car la droite (EF) est incluse dans le plan (EFGH), (1)

$(AB)\cap(EFGH)=\varnothing$ (2)

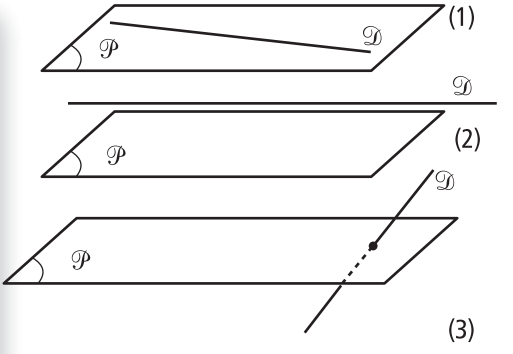
et $(BF)\cap(EFGH)=\{F\}$. (3)

À retenir

Les différentes positions

Soit $\mathscr{D}$ une droite et $\mathscr{P}$ un plan, on peut avoir :

- $\mathscr{D}\subset\mathscr{P}$: la droite $\mathscr{D}$ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$ (1) ;
- $\mathscr{D}\cap\mathscr{P}=\varnothing$: $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ n'ont pas de point commun (2) ;
- $\mathscr{D}\cap\mathscr{P}=\{I\}$: $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ se coupent en un point. (3)



Dans les cas (1) et (2), on dit que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.

© Cned – Académie en ligne

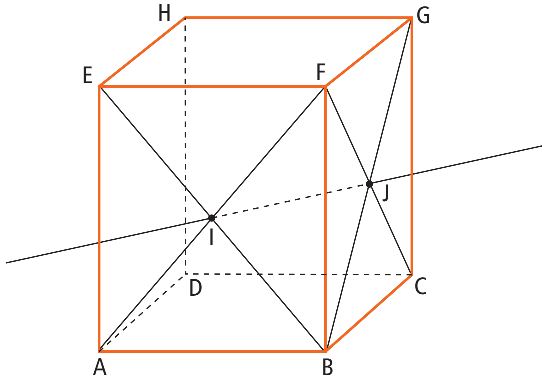
Remarque

Tout plan coupant une droite coupe toute parallèle à cette droite.

c) Comment montrer qu'une droite est parallèle à un plan ?

Théorème : Si une droite est parallèle à une droite d'un plan alors elle est parallèle à ce plan.

Exemple 2 *Dans le cube, on appelle I et J les centres des faces ABFE et BCGF. Montrer que : (IJ) // (EFG).*



On cherche une droite du plan (EFG) parallèle à la droite (IJ). On se place dans le plan (EBG).

I et J sont les milieux respectifs de [EB] et [BG]. Donc d'après le théorème de la droite des milieux, on a :

(IJ) // (EG).

Or (EG) est incluse dans le plan (EFG), on a donc : (IJ) // (EFG).

d) Position de deux plans :

Exemple 3 *Dans le cube ABCDEFGH, déterminer :*

$(FGCB)\cap(EFGH)$, $(EBC)\cap(EFGH)$, $(ABCD)\cap(EFGH)$ et $(EFG)\cap(EFGH)$.

$(FGCB)\cap(EFGH)=(FG)$ (1)

$(EBC)\cap(EFGH)=(EH)$ (2)

$(ABCD)\cap(EFGH)=\varnothing$ (3)

$(EFG)\cap(EFGH)=(EFG)$ car $(EFG)=(EFGH)$ (4).

À retenir

Les différentes positions

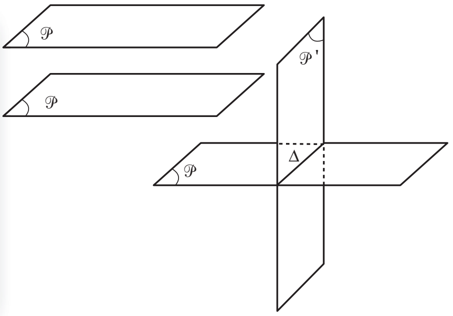
Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans, on peut avoir :

a) $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ confondus : $\mathcal{P}=\mathcal{P}'$ (4).

b) $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ strictement parallèles : $\mathcal{P}\cap\mathcal{P}'=\varnothing$ (3).

c) $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sécants suivant une droite (Δ) :

$\mathcal{P}\cap\mathcal{P}'=(\Delta)$ (1) et (2).



© Cned – Académie en ligne

Propriété 1 :

- **Si deux plans distincts de l'espace ont un point commun, ils ont exactement une droite commune passant par ce point.**
- **Si une droite $\mathscr{D}$ est parallèle à un plan $\mathscr{P}$ alors toute droite parallèle à $\mathscr{D}$ est parallèle à tout plan parallèle à $\mathscr{P}$.**

Il n'existe qu'un seul plan parallèle à un plan donné et passant par un point donné.

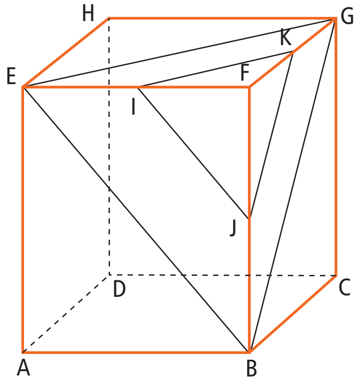
Si deux plans sont parallèles à un même troisième, ils sont parallèles entre eux.

e) Comment montrer que deux plans sont parallèles

Théorème : Si un plan $\mathscr{P}$ contient deux droites sécantes et parallèles à un plan $\mathscr{P}$' alors les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$' sont parallèles.

Exemple 4 *Dans le cube ABCDEFGH, on considère I le milieu de [EF], J celui de [BF] et K celui de [FG].*

Montrer que les plans (EBG) et (IJK) sont parallèles.



Considérons le triangle EFG. I et K sont les milieux respectifs des côtés [EF] et [FG]. On a donc :
(IK) // (EG). Or (EG) est incluse dans le plan (EFG). On en déduit :
(IK) // (EFG).
De la même façon, on démontre que :
(IJ) // (EFG).
(IK) et (IJ) sont deux droites sécantes du plan (IJK). On a donc :
(IJK) // (EFG).

2 Sections de solides par des plans

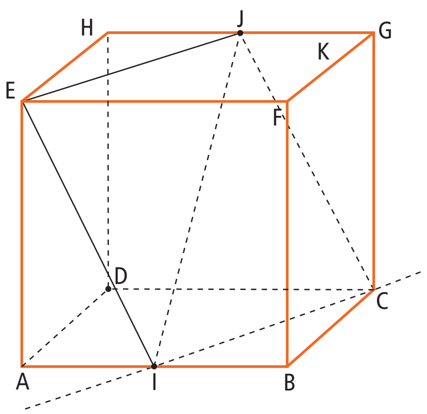
a) Propriétés utiles pour déterminer l'intersection de deux plans quand ils sont sécants suivant une droite

Propriété 1 : Admis

Si une droite $\mathscr{D}$ est parallèle à un plan $\mathscr{P}$, tout plan $\mathscr{P}$' contenant $\mathscr{D}$ et coupant $\mathscr{P}$ le coupe suivant une parallèle à $\mathscr{D}$.

© Cned – Académie en ligne

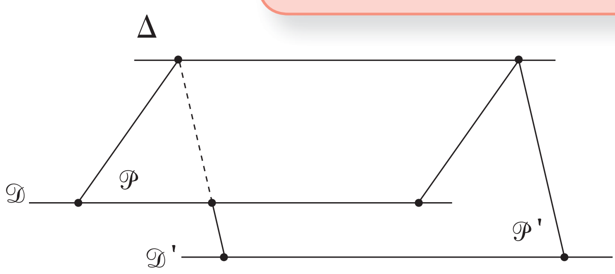
Exemple 5 *ABCDEFGH est un cube, I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [GH]. Déterminer la section du cube par le plan (EIJ).*



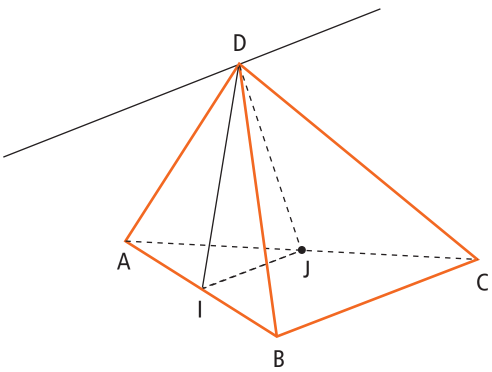
La droite (EJ) est parallèle au plan (ABCD) donc comme le plan (EIJ) contient (EJ), il coupe le plan (ABCD) le long d'une droite parallèle à (EJ). Cette droite est la parallèle à (EJ) passant par I, c'est-à-dire la droite (IC). On en déduit que la section du cube par le plan (EIF) est le quadrilatère (c'est même un losange) ICJE.

Propriété 2 : (Théorème du toit)

Soient deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$' parallèles. Lorsqu'un plan $\mathcal{P}$ contenant $\mathcal{D}$ est sécant à un plan $\mathcal{P}$' contenant $\mathcal{D}$' leur droite d'intersection Δ est parallèle à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}$'.



Exemple 6 *ABCD est un tétraèdre, I est le milieu de [AB] et J le milieu de [AC]. Déterminer l'intersection des plans (BCD) et (IJD).*



On nomme $(BCD) \cap (IJD) = \Delta$ (si ces deux plans étaient parallèles, ils seraient confondus car ils contiennent tous les deux, le point D).

Les droites (IJ) et (BC) sont parallèles (théorème de la droite des milieux dans le triangle ABC).

De plus, la droite (IJ) est incluse dans le plan (IJD) et la droite (BC) est incluse dans le plan (BCD). Ainsi, d'après le théorème du toit, les trois droites (IJ), Δ et (BC) sont parallèles.

Δ est donc la parallèle à (BC) passant par D.

Propriété 3 :

Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

© Cned – Académie en ligne

À retenir

Méthode pour déterminer l'intersection de 2 plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sécants selon une droite $\mathcal{D}$.

- On trouve 2 points A et B distincts appartenant tous deux à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Alors : $\mathcal{D} = (AB)$.
- On trouve un point A commun aux deux plans et une droite Δ de l'un parallèle à l'autre. Alors $\mathcal{D}$ est la parallèle à Δ passant par A (voir exemple 6).
- On trouve un point A commun aux deux plans et une droite Δ intersection de $\mathcal{P}$ et d'un plan parallèle à $\mathcal{P}'$. Alors $\mathcal{D}$ est la parallèle à Δ passant par A (voir exemple 17).

Exemple 7

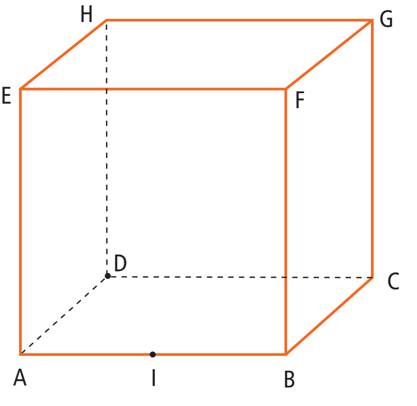
Soient ABCDEFGH un cube et I le milieu de [AB].

Déterminer : (EIC) $\cap$ (EFG).

E est un point commun aux deux plans (EIC) et (EFG).

Les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles.

De plus, intersection des plans (ABC) et (EIC) est la droite (IC) donc l'intersection des plans (EIC) et (EFG) est la parallèle à (IC) passant par E.



À retenir

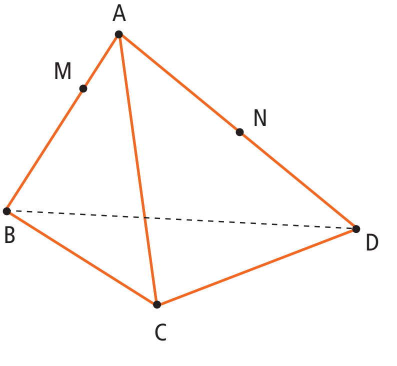
Méthode pour déterminer l'intersection d'une droite $\mathcal{D}$ et d'un plan $\mathcal{P}$.

- On trouve une droite Δ de $\mathcal{P}$ coplanaire et sécante avec $\mathcal{D}$. Alors : $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \mathcal{D} \cap \Delta$.
- (Méthode du plan auxiliaire) On trouve un plan $\mathcal{Q}$ contenant $\mathcal{D}$ puis on détermine l'intersection (c'est une droite Δ) des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. Alors : $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \mathcal{D} \cap \Delta$.

Exemple 8

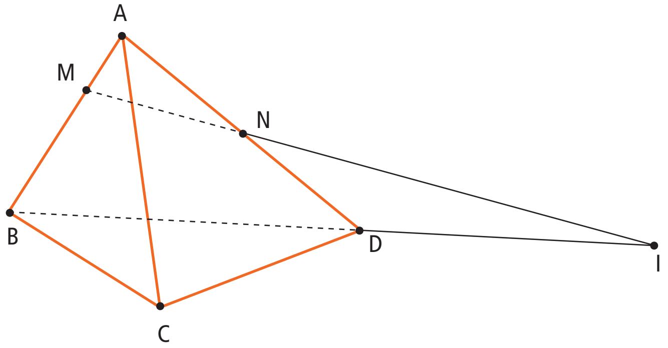
Soient ABCD un tétraèdre, M un point de [AB] tel que $AM = \frac{1}{3}AB$ et N le milieu de [AD]. Déterminer :

(MN) $\cap$ (BCD).

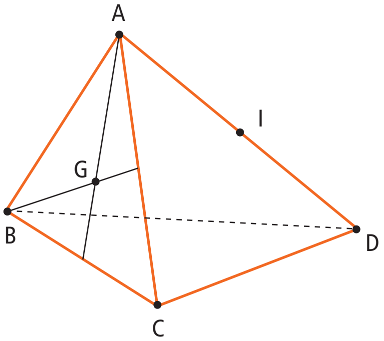


© Cned – Académie en ligne

La droite (BD) est incluse dans le plan (BCD) et est coplanaire sécante avec (MN).
On a donc : (MN) $\cap$ (BCD) = (MN) $\cap$ (BD).



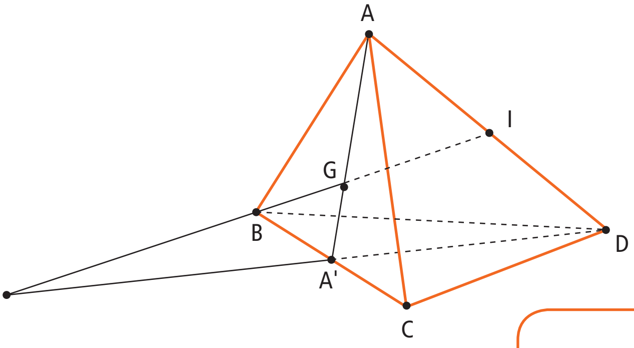
Exemple 9 *Soient ABCD un tétraèdre G le centre de gravité du triangle ABC et I le milieu de [AD]. Déterminer : (IG) $\cap$ (BCD).*



La droite (IG) est incluse dans le plan (AIG), c'est-à-dire le plan (AA'D) où A' est le milieu de [BC] (ce plan est le plan auxiliaire).

On a : (AA'D) $\cap$ (BCD) = (A'D).

Ainsi : (IG) $\cap$ (BCD) = (IG) $\cap$ (A'D).



Remarque

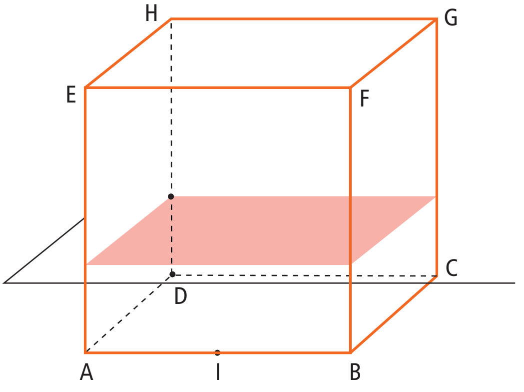
Le théorème de Thalès (utilisé sous sa forme contraposée) dans le triangle AA'D nous prouve que les droites (IG) et (A'D) sont non parallèles et donc sécantes (ces droites sont coplanaires). En effet :

$$\frac{AG}{AA'} \neq \frac{AI}{AD} \text{ car } \frac{AG}{AA'} = \frac{2}{3} \text{ et } \frac{AI}{AD} = \frac{1}{2}.$$

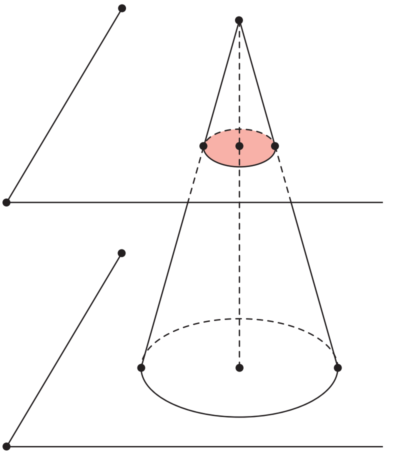
© Cned – Académie en ligne

b) Cas particuliers de sections de solides par des plans

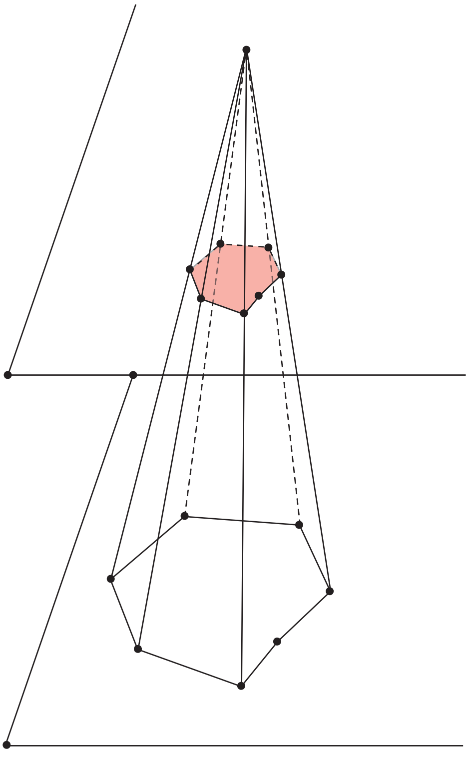
On donne ci-dessous quelques cas particuliers (à retenir !) de sections de solides par un plan.



- La section d'un cube par un plan parallèle à l'une des faces est un carré (cette section peut éventuellement être vide).



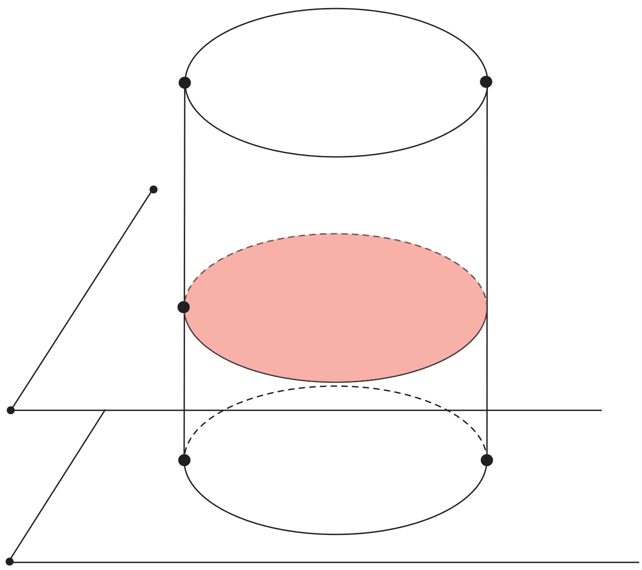
- La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone de même forme que la base, c'est-à-dire si la base est un triangle équilatéral (ou un rectangle ou un hexagone régulier) par exemple, la section est aussi un triangle équilatéral (ou un rectangle ou un hexagone régulier).

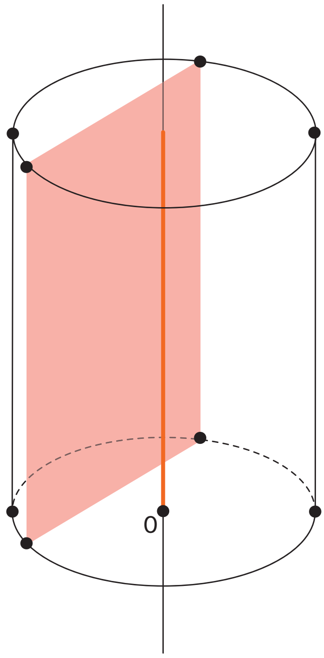


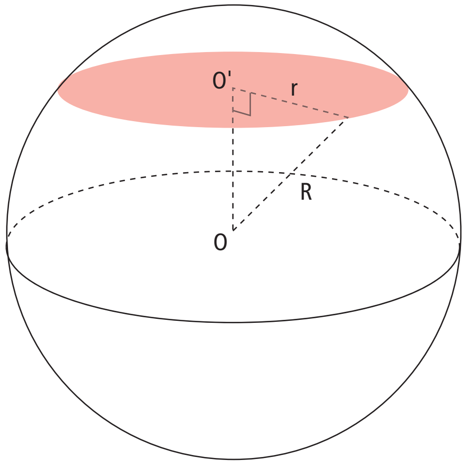
- La section d'un cône par un plan parallèle au plan de base est un cercle (voir ci-dessus).
- La section d'un cylindre par un plan parallèle au plan de base est un disque.
- La section d'un cylindre par un plan parallèle à l'axe du cylindre est un rectangle.

© Cned – Académie en ligne

▶ La section d'une boule par un plan est un disque (éventuellement cette intersection est vide ou réduite à un point).

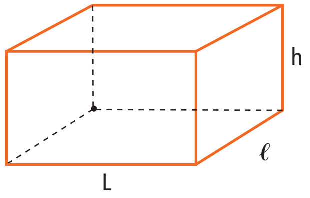






De plus, si O est le centre de la boule, R son rayon et O' le centre du disque intersection et r son rayon alors, grâce au théorème de Pythagore, on montre que :

$R^2 = OO'^2 + r^2$.



❹ Volumes des solides usuels

a) Le parallélépipède rectangle

Propriété 1 :

Le volume d'un parallélépipède rectangle de longueur L, de largeur ℓ et de hauteur h est : $V = L \times \ell \times h$

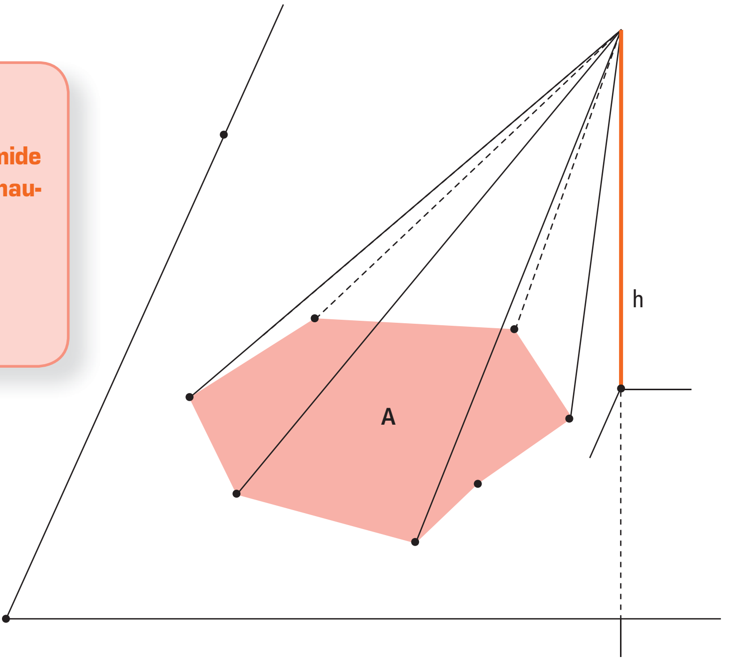
© Cned – Académie en ligne

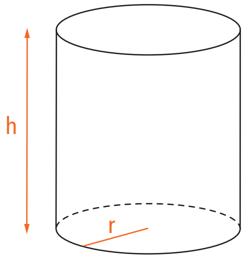
b) La pyramide

Propriété :

Le volume d'une pyramide d'aire de base A et de hauteur h est :

$$V = \frac{A \times h}{3}$$



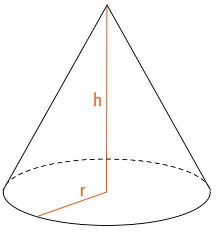


c) Le cylindre

Propriété :

Le volume d'un cylindre de hauteur h et de rayon r est : $V = A \times h = \pi r^2 h$

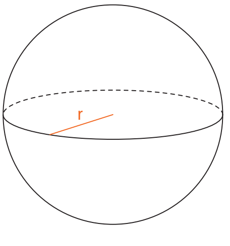
d) Le cône



Propriété :

Le volume d'un cône de hauteur h et ayant pour base un cercle de rayon r est : $V = \frac{A \times h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$.

e) La boule



Propriété :

Le volume d'une boule de rayon r est : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Remarque

L'aire d'une sphère de rayon r est : $S = 4\pi r^2$.

© Cned – Académie en ligne

C Synthèse du cours

1 Perspective cavalière

Définition

- **Les objets des plans frontaux sont représentés en vraie grandeur ;**
- **Les fuyantes sont représentées par des droites faisant toutes le même angle avec les droites horizontales, cet angle est l'angle de fuite de la perspective ;**
- **Sur les fuyantes, les longueurs sont réduites (ou agrandies) dans un même rapport, ce rapport est le coefficient de réduction de la perspective.**

Propriétés :

- **Trois points alignés sont représentés par 3 points alignés.**
- **Le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment dessiné.**
- **Deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles.**
- **Les longueurs sont conservés dans les plans frontaux.**

2 Droites et plans de l'espace

À retenir

Les différentes positions

Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans, on peut avoir :

a) $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ confondus : $\mathscr{P} = \mathscr{P}'$.

b) $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ strictement parallèles : $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \varnothing$.

c $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sécants suivant une droite (Δ) : $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = (\Delta)$.

© Cned – Académie en ligne

Propriétés :

- **Si deux plans distincts de l'espace ont un point commun, ils ont exactement une droite commune passant par ce point.**
- **Si une droite $\mathcal{D}$ est parallèle à un plan $\mathcal{P}$ alors toute droite parallèle à $\mathcal{D}$ est parallèle à tout plan parallèle à $\mathcal{P}$.**
- **Il n'existe qu'un seul plan parallèle à un plan donné et passant par un point donné.**
- **Si deux plans sont parallèles à un même troisième, ils sont parallèles entre eux.**
- **Si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.**

Théorème : Si un plan $\mathcal{P}$ contient deux droites sécantes et parallèles à un plan $\mathcal{P}'$ alors les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.

Propriété 1 :

Si une droite $\mathcal{D}$ est parallèle à un plan $\mathcal{P}$, tout plan $\mathcal{P}'$ contenant $\mathcal{D}$ et coupant $\mathcal{P}$ le coupe suivant une parallèle à $\mathcal{D}$.

Propriété 2 : (Théorème du toit) :

Soient deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles. Lorsqu'un plan $\mathcal{P}$ contenant $\mathcal{D}$ est sécant à un plan $\mathcal{P}'$ contenant $\mathcal{D}'$, leur droite d'intersection Δ est parallèle à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$.

À retenir

Méthode pour déterminer l'intersection de 2 plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sécants selon une droite D.

- On trouve 2 points A et B distincts appartenant tous deux à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Alors : $\mathcal{D}$ = (AB).
- On trouve un point A commun aux deux plans et une droite Δ de l'un parallèle à l'autre. Alors $\mathcal{D}$ est la parallèle à Δ passant par A.
- On trouve un point A commun aux deux plans et une droite Δ intersection de $\mathcal{P}$ et d'un plan parallèle à $\mathcal{P}'$. Alors $\mathcal{D}$ est la parallèle à Δ passant par A.

Propriété 3 :

Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

© Cned – Académie en ligne

À retenir

Méthode pour déterminer l'intersection d'une droite $\mathscr{D}$ et d'un plan $\mathscr{P}$.

- On trouve une droite $\boldsymbol{\Delta}$ de $\mathscr{P}$ coplanaire et sécante avec $\mathscr{D}$. Alors : $\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \mathscr{D} \cap \Delta$.
- (Méthode du plan auxiliaire) On trouve un plan Q contenant D puis on détermine l'intersection (c'est une droite $\boldsymbol{\Delta}$) des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$. Alors : $\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \mathscr{D} \cap \Delta$.

Des exemples de sections

Des exemples de sections

- La section d'un cube par un plan parallèle à l'un des côtés est un carré (cette section peut éventuellement être vide).
- La section d'une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone de même forme que la base.
- La section d'un cône par un plan parallèle au plan de base est un cercle.
- La section d'un cylindre par un plan parallèle au plan de base est un disque.
- La section d'un cylindre par un plan parallèle à l'axe du cylindre est un rectangle.
- La section d'une boule par un plan est un disque (éventuellement cette intersection est vide ou réduite à un point).

2 Volumes des solides usuels

a) Le parallélépipède rectangle

$$V = L \times l \times h$$

b) La pyramide

$$V = \frac{A \times h}{3}$$

c) Le cylindre

$$V = A \times h = \pi r^2 h$$

d) Le cône

$$V = \frac{A \times h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

e) La boule

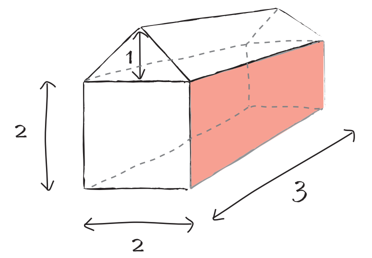
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad S = 4\pi r^2$$

© Cned – Académie en ligne

D Exercices d'apprentissage

Exercice 9

Construire la maison ci-contre en perspective cavalière PC $\left(45° ; \frac{1}{2}\right)$ de telle sorte que le mur colorié corresponde à un plan frontal.



Exercice 10

Soit un cube ABCDEFGH.

1. D appartient-il au plan contenant les points B, F et H ?
2. Même question pour E.
3. On note (BCH) le plan contenant les points B, C, H.

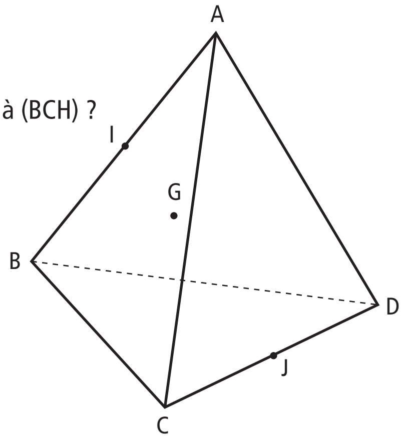
a) A appartient-il au plan (BCH) ?

b) Même question pour E.

c) Soit I le centre de ABFE : I appartient-il à (BCH) ?

Exercice 11

On considère le tétraèdre ci-contre :



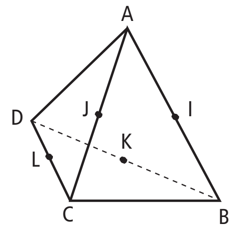
I est le milieu de [AB] J est le milieu de [CD]

G est le centre de gravité du triangle ABJ.

Les points suivants sont ils dans un même plan ?

A, B, I, J ? A, B, C, J ? A, B, G, J

Exercice 12



On considère un tétraèdre ABCD

On appelle I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [AC], [DB] et [DC].

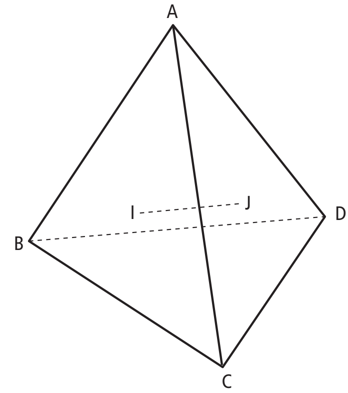
Montrer que les points I, J, K et L sont coplanaires.

Exercice 13

Soit un tétraèdre ABCD

I est le centre de gravité du triangle ABC, J celui du triangle ACD

Démontrer que la droite (IJ) est parallèle à la droite (BD).



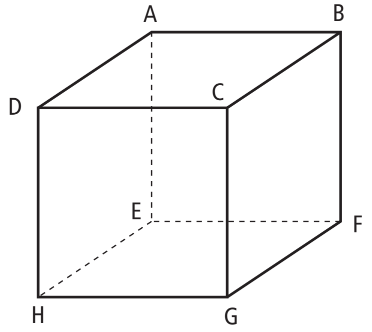
© Cned – Académie en ligne

Exercice 14 Étant donné le cube ABCDEFGH ci-contre, on appelle I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [HG] et [HE].

Montrer que les points I, J, K et L sont dans un même plan.

Comparer les longueurs des segments [IK] et [JL] ;

Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ?



Exercice 15 Placer respectivement sur les arêtes [BC], [CA] et [AD]. d'un tétraèdre ABCD des points M, N et P tels que (MN)//(AB) et (NP//(CD).

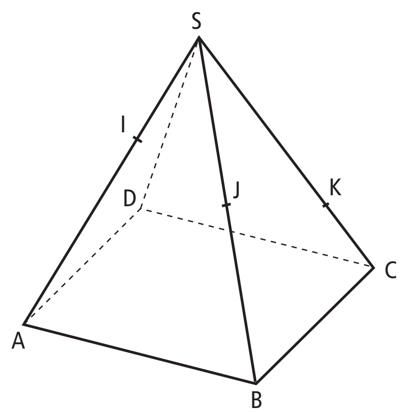
a) Montrer que la parallèle à la droite (CD) passant par M est contenue dans le plan (MNP) ?

b) Cette droite coupe la droite (BD) en Q. Montrer que les droites (PQ) et (AB) sont parallèles.

Exercice 16 I, J et K sont des points situés respectivement sur les arêtes [SA], [SB] et [SC] de la pyramide SABCD.

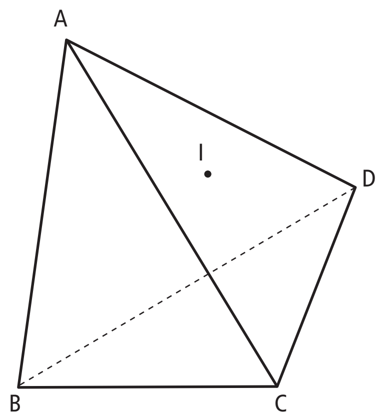
a) Construire les points d'intersection des droites (IJ), (JK) et (IK) avec le plan (ABC).

b) Pourquoi les points obtenus sont-ils forcément alignés ?

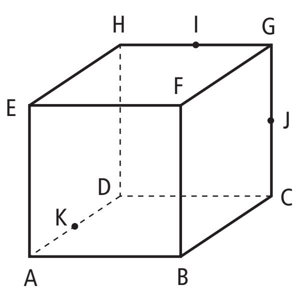


Exercice 17 ABCD est un tétraèdre et I est un point quelconque de la face ACD ; La parallèle à la droite (AB) passant par I coupe le plan (BCD) en un point J.

Construire ce point J.



Exercice 18



On considère le cube ABCDEFGH ci-contre et les points I, J, K appartenant respectivement aux segments [HG], [GC], [AD].

a) Construire le point d'intersection L de (IJ) et du plan (ABC).

b) Déterminer l'intersection des plans (IJK) et (ABC).

c) Construire le polygone (P) intersection de (IJK) avec les faces du cube.

(On appellera M et N les points d'intersections respectifs de (IJK) avec les droites (BC) et (EH))

© Cned – Académie en ligne

Exercice 19 On considère un tétraèdre SABC ; sur les arêtes [SA], [SB] et [SC] on place respectivement trois points I, J et K de telle sorte que : la droite (IJ) coupe la droite (AB) en un point appelé G,

la droite (IK) coupe la droite (AC) en un point appelé F,

la droite (JK) coupe la droite (BC) en un point appelé E.

a) Faire un dessin.

b) Expliquer pourquoi les points E, F, G sont alignés.

c) On appelle L un point placé sur la droite (JK) de telle sorte que la droite (IL) coupe le plan (ABC) en un point appelé M. Placer M sur la figure.

Exercice 20 Soient O un point de l'espace, $\mathcal{B}$ la boule de centre O et de rayon 5 et $\mathcal{P}$ un plan situé à la distance 4 de O

1. Déterminer la nature de la section de $\mathcal{B}$ par le plan $\mathcal{P}$.
2. Calculer l'aire de cette section.

Exercice 21 On laisse tomber une bille sphérique de diamètre inférieur à 4 cm) dans un verre cylindrique rempli d'eau. Le verre ayant pour diamètre 4 cm et pour hauteur 10 cm.

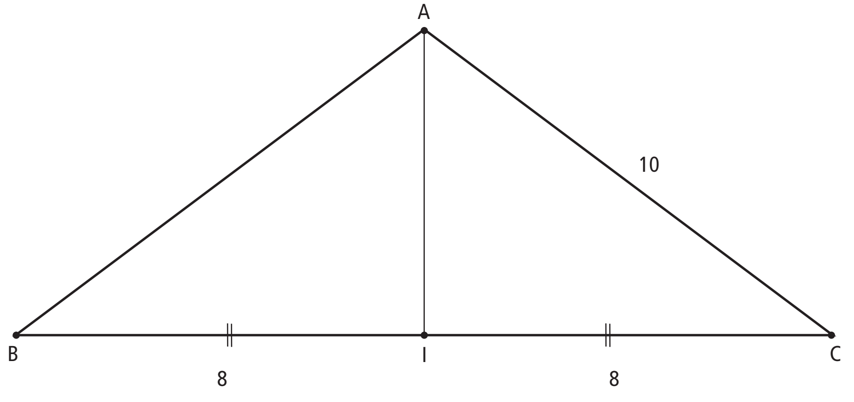
1. Quel volume d'eau y a-t-il dans le verre ?
2. Est-il possible que le tiers de l'eau soit renversé ?

Exercice 22 ABCDEFGH est un cube de côté 10 cm. Déterminer le volume de la pyramide ABCDE..

Exercice 23 On construit un cône à partir du triangle ABC ci-dessous en « collant [AB] et [AC] », B venant en C.

On suppose que ABC est un triangle isocèle de sommet A et que : BC = 16, AB = 10.

1. Calculer la hauteur du cône obtenue.
2. Calculer le rayon du cercle de base.
3. En déduire le volume du cône.



© Cned – Académie en ligne

4 Exercices d'approfondissement

Exercice I

[OA] et [OB] sont deux rayons perpendiculaires d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O.

$\mathscr{C}_1$ est le demi-cercle de diamètre [AB] passant par O.

M est un point de $\mathscr{C}_1$ distinct de A, B et O. La droite (BM) recoupe $\mathscr{C}$ en N.

Démontrer que le triangle AMN est rectangle isocèle.

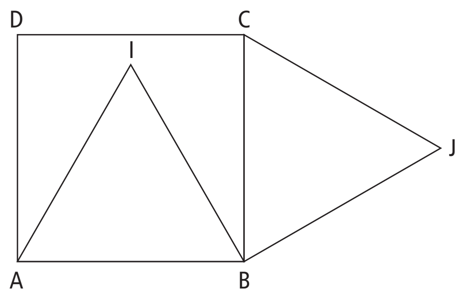
Exercice II

Soient un triangle ABC (quelconque) et I le milieu de [BC].Soient P le pied de la hauteur du triangle ABI issue de B et Q le pied de la hauteur du triangle AIC issue de C.

Montrer que BP = CQ en utilisant au moins deux méthodes différentes.

Exercice III

Soient ABCD un carré et CBJ et AIB, deux triangles



équilatéraux disposés comme sur la figure ci-contre.

Montrer que les points D, I et J sont alignés.

Cet exercice a déjà été traité (exercice VII de la séquence 2). On se propose de le traiter d'une autre façon.

On pourra, par, exemple déterminer les angles $\widehat{IDC}$ *et* $\widehat{CDJ}$.

Exercice IV

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de diamètre [AB].

M est un point de $\mathscr{C}$ distinct de A et B.R est un point de [AB] lui aussi distinct de A et B.

La perpendiculaire à (AB) passant par R coupe (AM) en P et (BM) en Q.La droite (AQ) coupe (BP) en I.

Démontrer que le point I appartient au cercle $\mathscr{C}$.

On pourra penser au théorème de la médiane.

Exercice V

$\mathscr{C}$ est un cercle ; [AB] et [CD] sont deux cordes perpendiculaires. On note O leur point d'intersection et I le milieu de [AD]. La droite (OI) coupe (CB) en H. Démontrer que les droites (OH) et (CB) sont perpendiculaires.

Exercice VI

ABCD est un parallélogramme ; I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [CD].

(AJ) coupe (BD) en M et (CI) coupe (BD) en N.

Démontrer que BN = NM = MD.

On pourra se demander quel rôle joue le point N pour le triangle ABC ?

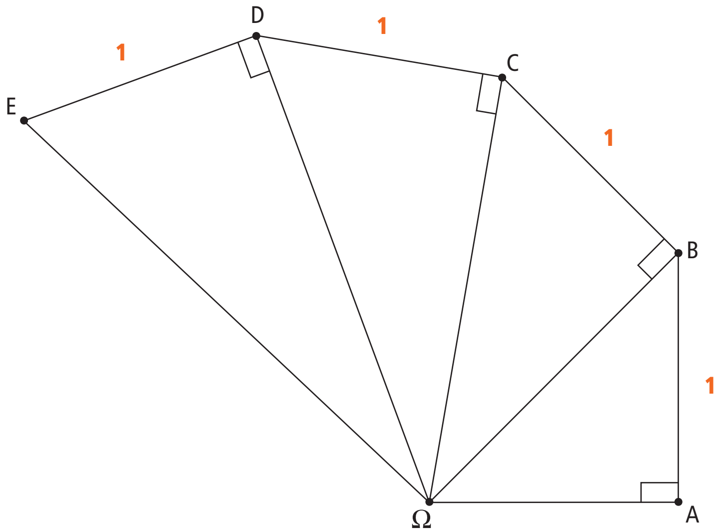
© Cned – Académie en ligne

Exercice VII ABC est un triangle isocèle en A. A′ est le milieu de [BC]. La perpendiculaire à (AC) passant par A′ coupe le côté [AC] en H. I est le milieu de [A′H] et K est le milieu de [HC].

Démontrer que les droites (BH) et (AI) sont perpendiculaires.

On pourra se demander quel rôle joue le point I pour le triangle AA′K ?

Exercice VIII On effectue la construction suivante. Le point Ω (lettre grecque **Omega**) est un point du plan et A est tel que :



$\Omega A = 1$.

On construit alors les points B, C, D, … en tournant autour de Ω dans le sens inverse des aiguilles d'une montre de la façon suivante.

Les triangles ΩAB, ΩBC, ΩCD, … sont rectangles en A, B, C, … et de plus : $AB = BC = CD = \ldots = 1$.

On se pose la question suivante :

Combien d'étapes sont-elles nécessaires pour effectuer « un tour autour de Ω ? ».

1. Calculer ΩB , ΩC er $\widehat{A\Omega B}$. À l'aide de la fonction $\sin^{-1}$ de la calculatrice, calculer $\widehat{B\Omega C}$ et $\widehat{C\Omega D}$.

2. Pour répondre à la question, on désire automatiser les calculs à l'aide d'un tableur de la façon suivante.

	A	B	C	D	E	F
1	Étape n°	Triangle Ω …	Hypoténuse	(côté opposé) / (hypoténuse)	Angle	Angle total
2	1	AB				45
3	2	BC				80,26
4	3					110,26

a) Que peut-on entrer dans C2 ?

b) Quelle formule faisant référence à C2 peut-on écrire dans C3 de telle sorte que la formule puisse être étendue à toute la colonne ?

c) Quelle formule faisant référence à C2 peut-on écrire dans D2 de telle sorte que la formule puisse être étendue à toute la colonne ?

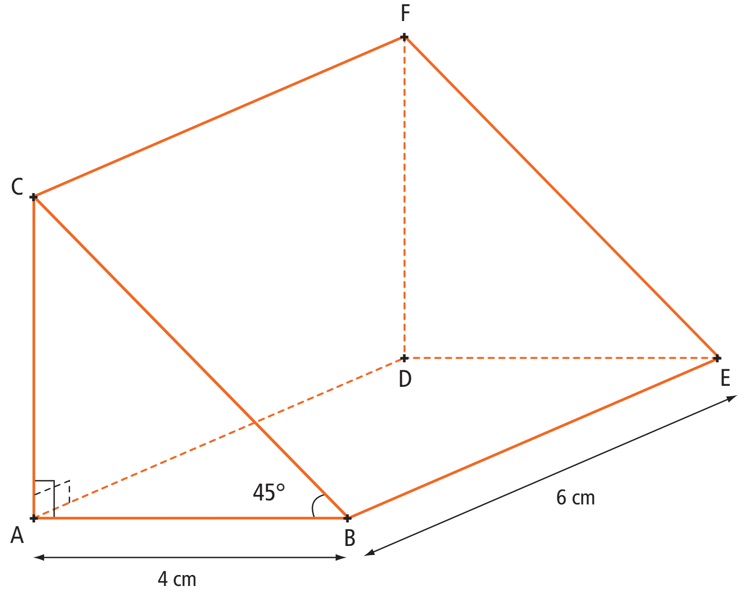
© Cned – Académie en ligne

❸ Avec le tableur **OpenOffice**, =ASIN(D2) nous donne le nombre dont le sinus est D2 mais donne ce nombre en radians et non en degré. Il faut donc entrer : =DEGRES(ASIN)(D2) dans E2.

On entre «=E2» dans F2 et «=F2+E3» dans E3. On étend .alors les différentes cellules aux colonnes correspondantes. A l'aide de cette feuille de calculs, répondre à la question de l'énoncé.

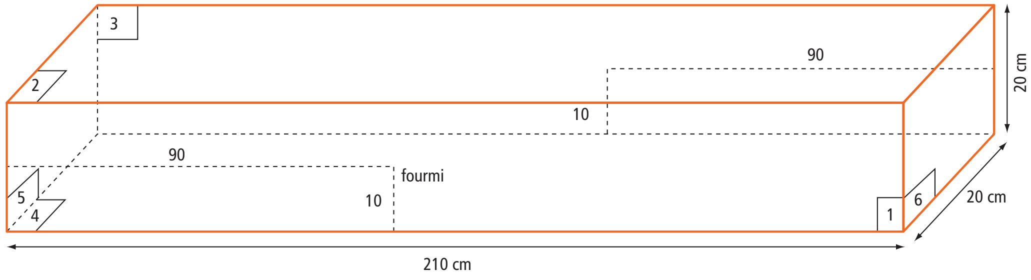
Exercice iX

Représenter le prisme ci-dessous en perspective cavalière PC $\left(45°; \frac{1}{2}\right)$ dont (CBEF) est un plan frontal.



Exercice X

Une fourmi se déplace sur une poutre. Le dessin ci-dessous nous montre les dimensions de la poutre ainsi que les positions de la fourmi et de son garde-manger. Quelle est la distance minimum que doit parcourir la fourmi pour rejoindre son garde-manger.



© Cned – Académie en ligne

Exercice XI

On considère un cube ABCDEFGH de côté ***a***. P est le centre de la face EFGH et Q le centre de la face BCGF. M est le milieu de [PQ].

On admet que (EG) est perpendiculaire à (EA) et que (BG) est perpendiculaire à (AB).

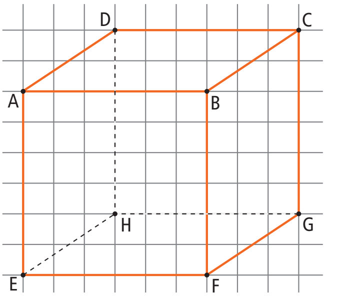
1. Montrer que : $PQ = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
2. Montrer que : $AP = AQ = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.
3. Calculer une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{PAQ}$.
4. Donner en fonction de ***a*** la valeur exacte de l'aire du triangle APQ.

Exercice XII

ABCDEFGH est un cube de côté 3 cm. On considère le milieu M de [GC].

On admet que ADM est rectangle en D.

1. Calculer les longueurs AF, DM et AM.
2. Donner une valeur approchée de l'angle $\widehat{AMD}$.



Exercice XIII

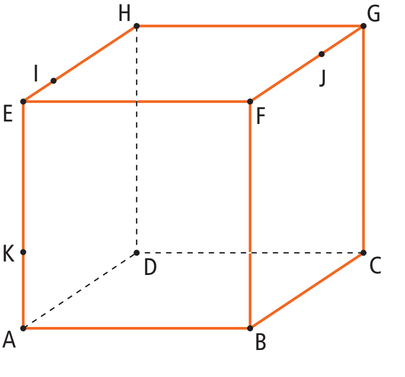
Soit ABCD un tétraèdre régulier de côté **a**, ses 4 faces sont donc des triangles équilatéraux de côté ***a***. On note G le centre de gravité du triangle BCD et I le milieu de [CD]. On admet que les droites (AG) et (GI) sont perpendiculaires.

1. Montrer que : $BI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. En déduire GI en fonction de ***a***.
2. Déterminer AG en fonction de ***a***.
3. Le tétraèdre admet un patron triangle équilatéral. Déterminer le côté de ce triangle en fonction de ***a***.
4. Montrer que le tétraèdre admet un patron rectangulaire. En donner les dimensions *(on pourra imaginer que l'on découpe selon [AI]).*

Exercice XIV

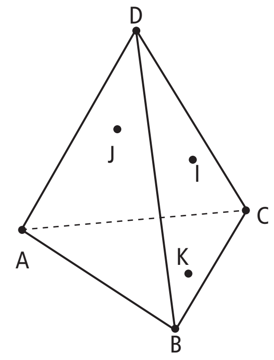
ABCDEFGH est un cube. I, J et K appartiennent respectivement aux segments [GH], [GC] et [AD].

Construire la section du cube par le plan (IJK).



© Cned – Académie en ligne

Exercice XV ABCD est un tétraèdre, I, J et K appartiennent respectivement aux faces (BCD), (ABD) et (ABC).

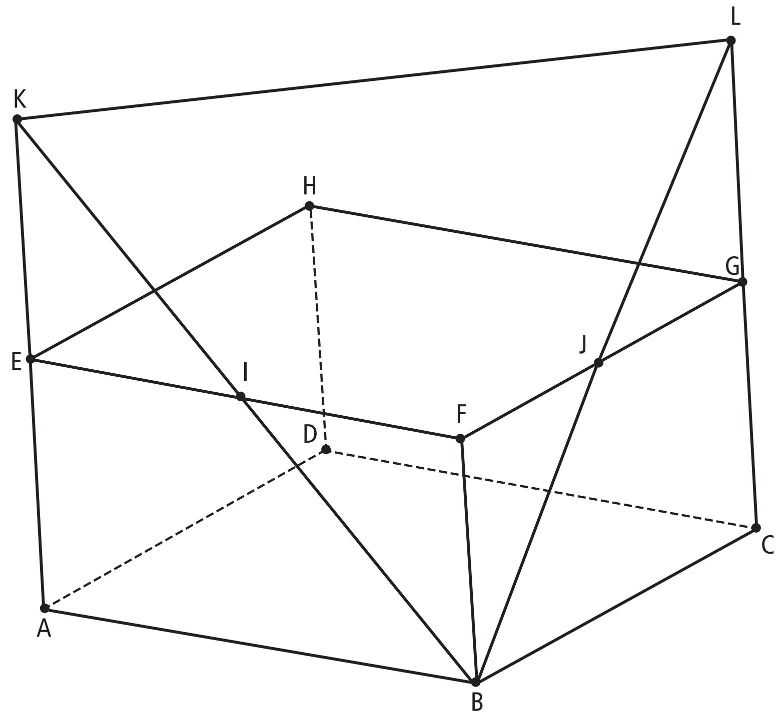


On suppose que la droite (IJ) n'est pas parallèle au plan (ABC).

1. Construire l'intersection de (IJ) et du plan (ABC). *(on pourra considérer un plan auxiliaire).*
2. Construire la section du tétraèdre par le plan (IJK).

Exercice XVI ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. I et J sont les milieux respectifs de [EF] et [FG]. On note : K = (BI) $\cap$ (AE) et L = (BJ) $\cap$ (GC).

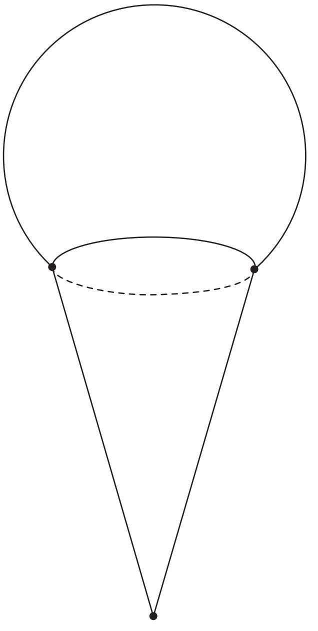
Montrer que : (KL) // (ABCD).



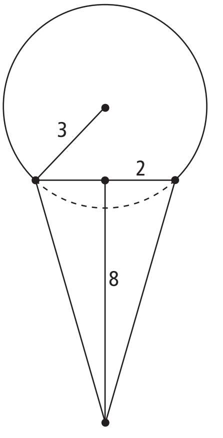
© Cned – Académie en ligne

Exercice XVII On pose une boule de glace de rayon 3 cm sur un cornet de glace de hauteur 8 cm et de rayon 2 cm.

Quelle est la hauteur totale de la glace ?



Coupe transversale



© Cned – Académie en ligne