DS 1

Terminale ES-L – 25 septembre 2019

Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.

Une part importante de la note sera dédiée à la rédaction, aux explications et à l'utilisation des notations mathématiques.

Exercice 1 QCM(/3)

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples).

Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

1. Quelle est la meilleure remise ?
   a) Une remise de 20% b) Trois remises de 7% c) Quatre remises de 6%
2. La suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et par la formule de récurrence $u_{n+1} = 3u_n + 2u_n$ est
   a) Arithmétique b) Géométrique c) Ni géométrique ni Arithmétique
3. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{U}([2, 11])$. Alors $P(X > 5,5)$ est égale à
   a) 0,5 b) 5,5 c) 8

Solution 1

3 p.

Les réponses suivantes sont justifiées ce qui n'est pas demandé dans ce QCM.

1. Réponse c) Quatre remises de 6%.
   (a) Une remise de 20% revient à multiplier par 0.8
   (b) Trois remises de 7% revient à multiplier par $(1 - 0.07)^3 = 0.93^3 \approx 0.804$
   (c) Quatre remises de 6% revient à multiplier par $(1 - 0.06)^4 = 0.94^4 \approx 0.78$
2. Réponse b) Géométrique
   En effet, $u_{n+1} = 3u_n + 2u_n = 5u_n$, pour passer d'un terme au suivant on multiplie par 5.
3. Réponse a) 0.5
   Les deux autres réponses ne sont pas des probabilités car 5,5 et 8 ne sont pas des nombres compris entre 0 et 1.

Exercice 2 Un peu de hasard(/5)

Les questions suivants sont indépendantes

1. Après une tétée, un bébé dort 30min puis peut demander à manger à n'importe quel moment dans les 3 heures qui suivent. Lucas a terminé de téter à 9h.
   On note X la variable aléatoire décrivant l'heure où Lucas va demander à nouveau à manger.
   (a) Avec quelle loi peut-on modéliser X ?
   (b) Calculer $P(X < 11)$.
   (c) Sa maman veut partir faire des courses entre 10h30 et 11h45. Quelle est la probabilité que Lucas réclame pendant son absence ?
2. La masse en gramme des melons d'un maraîcher est modélisée par une variable aléatoire M qui suit une loi uniforme sur l'intervalle [850 ;x] avec x>1200. On constate que 75% des melons du maraîcher ont une masse comprise entre 900 g et 1200 g. Déterminer x.

Solution 2

5 p.

1. (a) X peut suivre une loi uniforme sur $[9,5\,;12,5]$ notée $\mathcal{U}([9.5\,;12.5])$.

   (b) $P(X > 11) = \dfrac{12,5-11}{12,5-9,5} = \dfrac{1,5}{3} = 0,5$

   (c) Cette probabilité revient à calculer $P(10,5 < X < 11,75) = \dfrac{1,25}{3} \approx 0.42$

2. On cherche à déterminer x tel que

$$\begin{aligned}
0,75 &= P(900 < M < 1200) = \frac{1200-900}{x-850} \\
0.75(x-850) &= 300 \\
0.75x - 637.5 &= 300 \\
0.75x &= 937.5 \\
x &= \frac{937.5}{0.75} = 1250
\end{aligned}$$

   Donc M suit la loi $\mathcal{U}([850\,;1250])$.

Exercice 3 Pollution de l'air(/5)

Dans cette question l'utilisation des outils et des notations mathématiques sera valorisée même si elle n'est pas obligatoire.

Afin de respecter l'accord signé sur la pollution de l'air, certaines entreprises, dès l'année 2014, ont été contraintes de diminuer chaque année la quantité de CO_2 qu'elles produisent.

Une de ces entreprises émettait 15 milliers de tonnes de CO_2 en 2014 et $14,7$ milliers de tonnes en 2015.

On suppose que le taux de diminution annuel de CO_2 émis restera constant pendant les années suivantes.

1. Calculer le taux d'évolution de l'émission de CO_2 par cette entreprise entre 2014 et 2015.
2. L'accord prévoit que cette entreprise devra produire moins de 12 milliers de tonnes de CO_2 par an. En détaillant la méthode employée, déterminer à partir de quelle année la quantité de CO_2 émise par cette entreprise passera en dessous de ce seuil de 12 milliers de tonnes.

Solution 3

5 p.

1. Taux d'évolution entre 2014 et 2015.

$$\frac{v_a - v_d}{v_d} = \frac{14.7 - 15}{15} = -0.02 = -2\%$$

2. On peut modéliser la quantité émise par l'entreprise avec une suite (u_n). Comme le taux de diminution est supposé constant et égale à -2%, elle sera géométrique, de raison $1 - 0.02 = 0.98$ et aura pour premier terme $u_0 = 15$.

$$\begin{array}{rcl}
u_0 & = & 15 \\
u_1 & = & u_0 \times 0.98 = 15 \times 0.98 = 14.7 \\
u_2 & = & 14.70 \times 0.98 = 14.41 \\
u_3 & = & 14.41 \times 0.98 = 14.12 \\
u_4 & = & 14.12 \times 0.98 = 13.84 \\
u_5 & = & 13.84 \times 0.98 = 13.56 \\
u_6 & = & 13.56 \times 0.98 = 13.29 \\
u_7 & = & 13.29 \times 0.98 = 13.02 \\
u_8 & = & 13.02 \times 0.98 = 12.76 \\
u_9 & = & 12.76 \times 0.98 = 12.51 \\
u_{10} & = & 12.51 \times 0.98 = 12.26 \\
u_{11} & = & 12.26 \times 0.98 = 12.01 \\
u_{12} & = & 12.01 \times 0.98 = 11.77
\end{array}$$

Il faudra attendre 12 années soit 2026.

Exercice 4 Pyrale du buis(/7)

La Pyrale du buis est une espèce de lépidoptères de la famille des Crambidæ, originaire d'Extrême-Orient. Introduite accidentellement en Europe dans les années 2000, elle y est devenue invasive. Une étude décomptant le nombre de chenilles de Pyrale dans un camping d'Ardèche donne les estimations suivantes :

Date	01/06/18	02/06/18	03/06/18
n	0	1	2
Nombre de chenilles en centaines	97	181	258

L'exercice étudie et compare deux modélisations de l'évolution du nombre de chenilles.

Partie 1 : *Modèle 1*

Dans cette partie, on modélise le nombre de chenilles le n-ième jour après le 1er juin 2018 (nombre exprimé en centaines) par une suite géométrique (u_n) de raison $q = 1,63$. Ainsi $u_0 = 97$.

1. Calculer u_2. Arrondir à l'unité.
2. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
3. Justifier que la suite (u_n) est croissante.
4. Selon ce modèle, quel sera le nombre de chenilles le 13 juin 2018 ? Arrondir à la centaine.

Partie 2 : *Modèle 2*

Dans cette partie, on modélise le nombre de chenilles le n-ième jour après le 1er juin 2018 (nombre exprimé en centaines) par une suite (v_n) telle que :

$v_0 = 97$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0,91v_n + 93$.

5. On admet que, pour tout entier naturel n : $v_n = \dfrac{1}{3}\left(-2\,809 \times 0,91^n + 3\,100\right)$.
   Selon ce modèle, quel sera le nombre de chenilles le 13 juin 2018 ? Arrondir à la centaine.
6. En étudiant le signe de $v_{n+1} - v_n$, montrer que la suite (v_n) est croissante.

Partie 3 : *Comparaison des différents modèles*

Les valeurs relevées dans le camping sur le mois de juin n'ont jamais dépassé 1000 centaines de chenilles.

7. Quel modèle paraît le plus adapté ?

Solution 4

7 p.

1.
$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \times 1.63 = 97 \times 1.63 = 158 \\ u_2 &= u_1 \times 1.63 = 158 \times 1.63 = 257 \end{aligned}$$

2. Forme explicite de la suite $u_n = 97 \times 1.63^n$
3. (u_n) est croissante car la raison $q = 1.63$ est supérieur à 1.
4. Le nombre de chenilles le 13 juin 2018 correspond à
$$u_{12} = 97 \times 1.63^{12} = 34\,121$$

5. Comme précédemment le 13 juin 2018 correspond au 12e terme de la suite
$$v_{12} = \frac{1}{3}\left(-2\,809 \times 0,91^{12} + 3\,100\right) = 731$$

6. Variation de la suite (v_n)

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}\left(-2\,809 \times 0,91^{n+1} + 3\,100\right)$$

Donc

$$\begin{array}{rcl}
v_{n+1} - v_n & = & \frac{1}{3}\left(-2\,809 \times 0,91^{n+1} + 3\,100\right) - \frac{1}{3}\left(-2\,809 \times 0,91^{n} + 3\,100\right) \\
v_{n+1} - v_n & = & \frac{1}{3}\left(-2\,809 \times 0,91^{n+1} + 3\,100 + 2\,809 \times 0,91^{n} - 3\,100\right) \\
v_{n+1} - v_n & = & \frac{1}{3}\left(-2\,809 \times 0,91^{n+1} + 2\,809 \times 0,91^{n}\right) \\
v_{n+1} - v_n & = & \frac{1}{3} \times 2809(-0,91^{n+1} + 0,91^{n}) \\
v_{n+1} - v_n & = & \frac{1}{3} \times 2809(-0,91^{n} \times 0.91 + 0,91^{n}) \\
v_{n+1} - v_n & = & \frac{1}{3} \times 2809 \times 0.91^{n} \times (-0.91 + 1)
\end{array}$$

Les nombres en dehors des parenthèses sont positifs.
$-0.91 + 1 = 0.09$ est aussi positif.
Donc $v_{n+1} - v_n$ est positif et donc la suite est croissante.

7. D'après la question 4., $v_{12} = 34\,121$ ce qui est beaucoup plus grand que les 1000 observées. La raison étant plus grande au 1, ce nombre va continuer d'augmenter. Le premier modèle ne semble donc pas adapté.

   Le deuxième modèle donne des quantités plus faible (731 au 13 juin). Il semble donc plus convenir.