Exercice 1 — Démonstration de la limite de q^n

Dans cet exercice, on souhaite démontrer que

$$\text{Si } q > 1 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$

Soit $q > 1$ donc il existe $a > 0$ tel que $q = 1 + a$.

1. Démontrer que $q^2 > 1 + 2a$
2. En déduire que $q^3 > 1 + 3a$
3. En déduire que $q^4 > 1 + 4a$
4. On a vu que pour démontrer les inégalités, on utilisait l'égalité précédente. On va vouloir généraliser cette façon pour toutes les inégalités. Autrement dit, on va supposer que

   $$q^n > 1 + n \times q \qquad \text{est vraie.}$$

   Et vous devez démontrer que

   $$q^{n+1} > 1 + (n+1)q \qquad \text{est vraie.}$$

   Ainsi, l'égalité est vraie quand $n = 2$ et on sait que **si** elle est vraie pour n **alors** elle est vraie pour $n + 1$, on peut donc en déduire qu'elle est vraie pour tout n. C'est ce que l'on appelle un raisonnement par récurrence.
5. Déterminer

   $$\lim_{n\to+\infty} 1 + n \times q$$

6. En déduire

   $$\lim_{n\to+\infty} q^n$$

Un raisonnement similaire peut être réalisé pour démontrer

$$\text{Si } q \in \left]0\,;1\right[\text{ alors } \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

Exercice 1 — Démonstration de la limite de q^n

Dans cet exercice, on souhaite démontrer que

$$\text{Si } q > 1 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$

Soit $q > 1$ donc il existe $a > 0$ tel que $q = 1 + a$.

1. Démontrer que $q^2 > 1 + 2a$
2. En déduire que $q^3 > 1 + 3a$
3. En déduire que $q^4 > 1 + 4a$
4. On a vu que pour démontrer les inégalités, on utilisait l'égalité précédente. On va vouloir généraliser cette façon pour toutes les inégalités. Autrement dit, on va supposer que

   $$q^n > 1 + n \times q \qquad \text{est vraie.}$$

   Et vous devez démontrer que

   $$q^{n+1} > 1 + (n+1)q \qquad \text{est vraie.}$$

   Ainsi, l'égalité est vraie quand $n = 2$ et on sait que **si** elle est vraie pour n **alors** elle est vraie pour $n + 1$, on peut donc en déduire qu'elle est vraie pour tout n. C'est ce que l'on appelle un raisonnement par récurrence.
5. Déterminer

   $$\lim_{n\to+\infty} 1 + n \times q$$

6. En déduire

   $$\lim_{n\to+\infty} q^n$$

Un raisonnement similaire peut être réalisé pour démontrer

$$\text{Si } q \in \left]0\,;1\right[\text{ alors } \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$