

Quelques rappels sur les variables aléatoires à densité sur un intervalle.

Définition : fonction de densité : une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ est une fonction de densité si et seulement si

$$\int_a^b f(x) dx = 1$$

Définition : variable aléatoire à densité : X suit la loi de probabilité de fonction de densité f si pour tout réels $c \leq d$ dans $[a; b]$ on a

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x) dx$$

Propriété : espérance X suit la loi de probabilité de fonction de densité f alors l'espérance se calcule avec la formule suivante

$$E[X] = \int_a^b xf(x) dx$$

Exercice 1

Fonction à densité

Déterminer, dans les cas suivant, si la fonction f est une fonction à densité.

1. $f(x) = 3x^2$ sur $[0; 1]$

3. $f(x) = \frac{2}{x^2}$ sur $[1; 2]$

5. $f(x) = e^x$ sur $[0; \ln(1)]$

2. $f(x) = -3x^2$ sur $[-1; 0]$

4. $f(x) = 0, 5 - x$ sur $[-1; 1]$

6. $f(x) = e^x$ sur $[0; \ln(2)]$

Exercice 2

Loi uniforme

Soit X une variable aléatoire sur $[0; 5]$ que l'on associe à la fonction $f(x) = 0.2$

1. Calculer

$$\int_0^5 f(x) dx$$

Est-ce que la fonction f est une fonction de densité sur $[0; 5]$?

2. Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de f sur $[0; 5]$. Et recopier l'allure de cette courbe.

3. Calculer les probabilités suivantes en représentant à chaque fois sur le graphique ce à quoi cela correspond.

$$P(1 \leq X \leq 2)$$

$$P(1 \leq X)$$

$$P(X \leq 2)$$

$$P(X = 2)$$

4. Calculer l'espérance de X .

Exercice 3

Étrange loi

Soit X une variable aléatoire sur $[0; 3]$ que l'on associe à la fonction $f(x) = -x^2 + \frac{10}{3}$

1. Calculer

$$\int_0^3 f(x) dx$$

Est-ce que la fonction f est une fonction de densité sur $[0; 3]$?

2. Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de f sur $[0; 3]$. Et recopier l'allure de cette courbe.

3. Calculer les probabilités suivantes en représentant à chaque fois sur le graphique ce à quoi cela correspond.

$$P(1 \leq X \leq 2)$$

$$P(1 \leq X)$$

$$P(X \leq 2)$$

$$P(X = 2)$$

4. Calculer l'espérance de X .