Exercice 1 — Pannes

On reprend l'activité commencée précédemment. Cette fois-ci, on modélise temps avant la première panne par une loi exponentielle de paramètres 0.02.

On note X la variable qui représenter le temps avant la première panne. On a donc $X \sim \mathcal{E}(0.02)$ et le loi de densité est

1. Quelle est la formule de la densité, $f(x)$, de X ?
2. Démontrer que $F(x) = -e^{-0.02x}$ est une primitive de $f(x)$.
3. Calculer les quantités suivantes
$$\int_0^{16} f(x)\,dx \qquad \int_0^{36} f(x)\,dx$$
4. En déduire les quantités
$$P(X \leq 16) \qquad P(X \leq 36)$$
5. Calculer les probabilités suivantes
$$P(X \leq 24) \qquad P(X \leq 12)$$
6. Quelle est la probabilité que l'appareil tombe en panne la première année ?
7. Quelle est la probabilité que l'appareil tombe en panne la deuxième année ?
8. Quelle est la probabilité que l'appareil tombe en panne après la fin de la 3e année ?

Exercice 2 — Loi exponentielle

1. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 0.5.
   (a) Quelle est la densité de x ? On la notera $f(x)$.
   (b) Démontrer qu'une primitive de $f(x)$ est $F(x) = -e^{-0.5x}$
   (c) Calculer les probabilités suivantes
$$P(X < 1) \qquad P(X < 10) \qquad P(1 < X < 2)$$
2. Soit $Y \sim \mathcal{E}(0.01)$, calculer les quantités suivantes
$$P(Y < 1) \qquad P(Y < 10) \qquad P(10 < Y < 20)$$
3. Soit $Z \sim \mathcal{E}(0.9)$, calculer les quantités suivantes
$$P(Z < 1) \qquad P(Z < 0.2) \qquad P(0.5 < Z < 0.6)$$

Exercice 3 — à l'envers

Soit $T \sim \mathcal{E}(0.02)$.
Déterminer x tel que $P(T \leq x) = 0.5$.
Comment interpréter le résultat dans le cadre du premier exercice ?