Bac Blanc

Terminale L-ES

Épreuve de :

MATHÉMATIQUES

19 mars 2020

Durée de l'épreuve : 3h

Ce sujet comporte 8 pages, numérotées de 1 / 8 à 8 / 8
Dès qu'il vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

L'utilisation de la calculatrice en mode **examen** est autorisée.

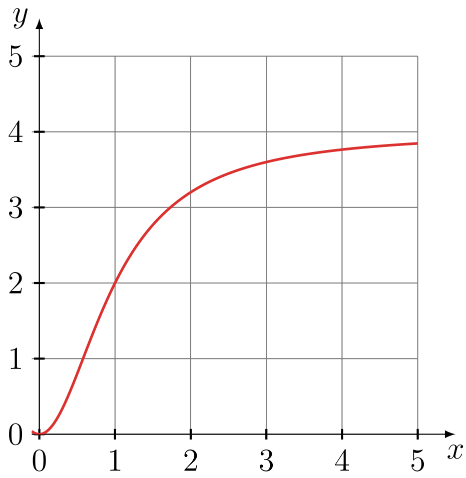
L'échange de calculatrice entre les élèves est strictement interdit.
L'usage du dictionnaire n'est pas autorisé.

Exercice	Points
1	4
2	5
3	5
4	6
5	5
Total	25

Exercice 1 QCM(/4)

Commun à tous les candidats *Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse n'ajoutent ni ne retirent aucun point.*
Inscrire sur la copie la référence de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$. On pose

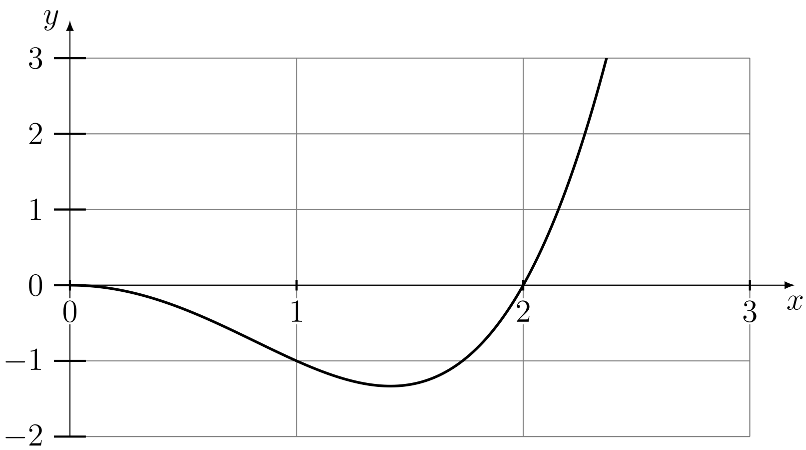
   

   On pose
   $$I = \int_1^3 f(x)dx$$
   Un encadrement de I est
   (a) $1 \leq I \leq 3$
   (b) $2 \leq I \leq 4$
   (c) $5 \leq I \leq 7$

2. On considère la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2. La somme des 13 premiers termes de cette suite vaut :

   (a) $4\,095$ | (b) $8\,191$ | (c) $\dfrac{1-2^{14}}{1-2}$

3. On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la dérivée seconde k'' d'une fonction k définie sur $[0\,;\,+\infty[$.

   (a) k est concave sur l'intervalle [1 ; 2]
   (b) k est convexe sur l'intervalle [0; 2]
   (c) k est convexe sur $[0\,;\,+\infty[$
   (d) k est concave sur $[0\,;\,+\infty[$

4. Le prix d'un produit est passé de 200€ à 100 €. Cette évolution correspond à deux baisses successives et identiques d'environ :

   (a) 50% | (b) 25% | (c) 29% | (d) 71%

Exercice 2 — Location de voitures(/5)

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Un loueur de voitures dispose au 1er mars 2015 d'un total de 10 000 voitures pour l'Europe.

Afin d'entretenir son parc, il décide de revendre, au 1er mars de chaque année, 25 % de son parc automobile et d'acheter 3 000 voitures neuves.

On modélise le nombre de voitures de l'agence à l'aide d'une suite :

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de voitures présentes dans le parc automobile au 1er mars de l'année $2015 + n$.

On a donc $u_0 = 10\,000$.

1. Calculer le nombre de voitures présentes dans le parc automobile au 1er mars 2016.
2. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 3\,000$.
3. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par
$$v_n = u_n - 12\,000.$$
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75. Préciser son premier terme.

   (b) Exprimer v_n en fonction de n.

   (c) Déterminer la limite de la suite (v_n).

   (d) Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_n = 12\,000 - 2\,000 \times 0,75^n$.

   (e) En vous appuyant sur les réponses données aux deux questions précédentes, que pouvez-vous conjecturer sur le nombre de voitures que comptera le parc automobile de ce loueur au bout d'un grand nombre d'années ?
4. On admet dans cette question que la suite (u_n) est croissante.
On aimerait déterminer l'année à partir de laquelle le parc automobile comptera au moins 11 950 voitures.

   (a) Recopier l'algorithme suivant et compléter les pointillés afin qu'il permette de répondre au problème posé.

Initialisation	U prend la valeur 10 000
	N prend la valeur 0
Traitement	Tant que ...
	N prend la valeur ...
	U prend la valeur ...
	Fin Tant que
Sortie	Afficher ...

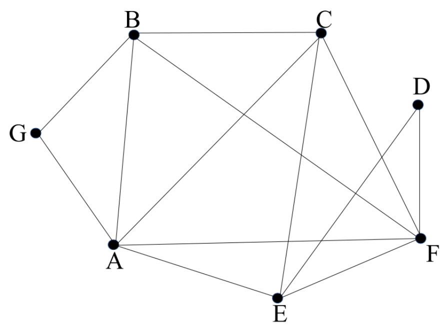
   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année recherchée.

Exercice 3 Chasse-neige et automates(/5)

Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1

Suite à des intempéries, un chasse-neige doit déblayer toutes les routes reliant les stations de son secteur. On modélise ce secteur par le graphe ci-dessous dont les sommets représentent les différentes stations désignées par des lettres. Les poids des arêtes sont les durées moyennes de parcours, en minute, du chasse-neige entre deux stations.



1. Ce graphe est-il connexe ? Justifier.
2. Le chasse-neige part de la station G. Peut-il partir de cette station et y revenir en parcourant une et une seule fois chacune des routes, matérialisées par les arêtes de ce graphe ?
3. Une saleuse doit de même parcourir l'ensemble des routes du secteur après déblaiement de la neige. Elle est garée à la station A et, après son travail, peut se garer dans n'importe quelle station.

   Peut-elle parcourir une et une seule fois chacune des routes pour traiter l'ensemble du secteur ?
4. On appelle M la matrice d'adjacence associée au graphe, les sommets étant rangés dans l'ordre alphabétique

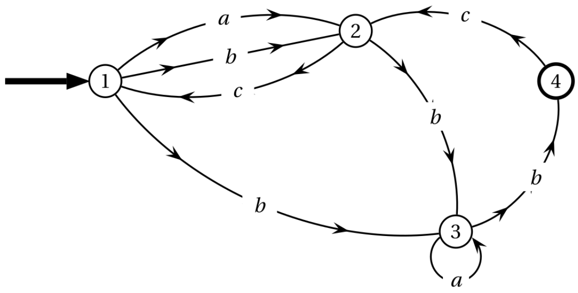
   Déterminer M.
5. On donne :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 61 & 48 & 52 & 28 & 45 & 55 & 24 \\ 48 & 44 & 41 & 21 & 42 & 45 & 20 \\ 52 & 41 & 50 & 25 & 41 & 52 & 25 \\ 28 & 21 & 25 & 15 & 20 & 24 & 10 \\ 45 & 42 & 41 & 20 & 44 & 48 & 21 \\ 55 & 45 & 52 & 24 & 48 & 61 & 28 \\ 24 & 20 & 25 & \mathbf{10} & 21 & 28 & 15 \end{pmatrix}$$

   Interpréter dans le contexte de l'exercice le nombre 10 figurant en caractère gras dans la matrice.

Partie 2

Pour accéder à un local d'une petite entreprise, les employés doivent choisir un code reconnu par l'automate suivant :



Une succession de lettres constitue un code possible si ces lettres se succèdent sur un chemin du graphe orienté ci-dessus, en partant du sommet 1 et en sortant au sommet 4.

1. Parmi les mots suivants, quels sont ceux qui sont reconnus par cet automate ?

$$abab,\ abc,\ abbcbb.$$

2. Recopier et compléter la matrice d'adjacence $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ associée au graphe orienté dans laquelle les sommets sont rangés dans l'ordre croissant.
3. Combien de mots de 4 lettres sont-ils reconnus par l'automate ? Justifier. Quels sont-ils ?

Commun à tous les candidats

La partie A peut être traitée indépendamment des parties B et C.

L'entreprise *BBE (Bio Bois Énergie)* fabrique et vend des granulés de bois pour alimenter des chaudières et des poêles chez des particuliers ou dans des collectivités.
L'entreprise produit entre 1 et 15 tonnes de granulés par jour.

- Les coûts de fabrication quotidiens sont modélisés par la fonction C définie sur l'intervalle $[1\,;15]$ par :

$$C(x) = 0,3x^2 - x + \mathrm{e}^{-x+5}$$

  où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $C(x)$ le coût de fabrication quotidien correspondant en centaines d'euros.

- Dans l'entreprise *BBE* le prix de vente d'une tonne de granulés de bois est de 300 euros.
  La recette quotidienne de l'entreprise est donc donnée par la fonction R définie sur l'intervalle $[1\,;15]$ par :

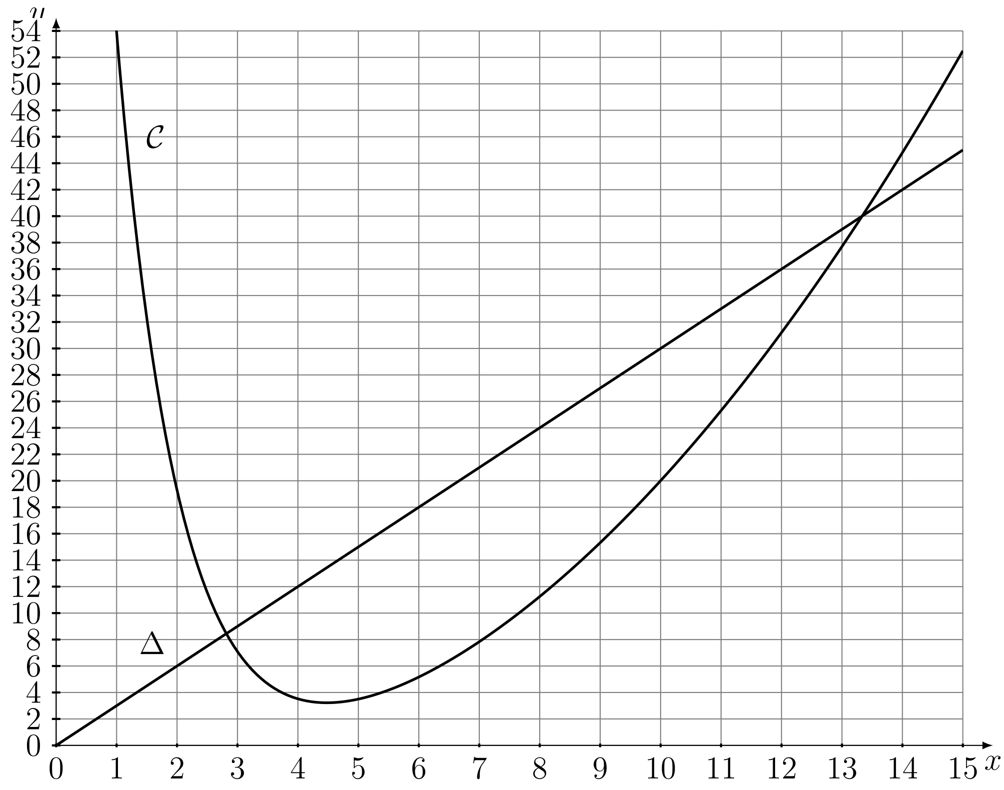
$$R(x) = 3x$$

  où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $R(x)$ la recette quotidienne correspondante en centaines d'euros.

- On définit par $D(x)$ le résultat net quotidien de l'entreprise en centaines d'euros, c'est-à-dire la différence entre la recette $R(x)$ et le coût $C(x)$, où x désigne la quantité de granulés en tonnes.

Partie A : Étude graphique

Sur le graphique ci-dessous, on donne $\mathcal{C}$ et Δ les représentations graphiques respectives des fonctions C et R dans un repère d'origine O.



Dans cette partie A, répondre aux questions suivantes à l'aide du graphique, et avec la précision permise par celui-ci. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer la quantité de granulés en tonnes pour laquelle le coût quotidien de l'entreprise est minimal.
2. (a) Déterminer les valeurs $C(6)$ et $R(6)$ puis en déduire une estimation du résultat net quotidien en euros dégagé par l'entreprise pour 6 tonnes de granulés fabriqués et vendus.

   (b) Déterminer les quantités possibles de granulés en tonnes que l'entreprise doit produire et vendre quotidiennement pour dégager un résultat net positif, c'est-à-dire un bénéfice.

Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1\,;15]$ par :

$$g(x) = -0,6x + 4 + \mathrm{e}^{-x+5}$$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[1\,;15]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. (a) Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;15]$.

   (b) En déduire que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[1\,;15]$.
2. (a) Dresser le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;15]$, en précisant les valeurs $g(1)$ et $g(15)$ arrondies à l'unité.

   (b) Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α et donner une valeur approchée à 0,1 de cette solution

   (c) Déduire des questions précédentes le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[1\,;15]$.

Partie C : Application économique

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;15]$, on a :

$$D(x) = -0,3x^2 + 4x - \mathrm{e}^{-x+5}$$

2. On admet que la fonction D est dérivable sur l'intervalle $[1\,;15]$ et on note D' sa fonction dérivée.

   Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;15]$, on a $D'(x) = g(x)$, où g est la fonction étudiée dans la partie B.
3. En déduire les variations de la fonction D sur l'intervalle $[1\,;15]$.
4. (a) Pour quelle quantité de granulés l'entreprise va-t-elle rendre son bénéfice maximal ?

   On donnera une valeur approchée du résultat à $0,1$ tonne près.

   (b) Calculer alors le bénéfice maximal à l'euro près.

Exercice 5 — Enquête client(/5)

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir au millième.

À partir d'une étude statistique dans une chaîne de restaurants, on a modélisé le comportement des clients par :

- 60 % des clients sont des hommes ;
- 80 % des hommes mangent un dessert alors que seulement 45 % des femmes en mangent un.

On interroge au hasard un client de cette chaîne. On note :

- H l'évènement « le client interrogé est un homme » ;
- D l'évènement « le client interrogé a mangé un dessert ».

On note également :

- $\overline{A}$ l'évènement contraire d'un évènement A ;
- $p(A)$ la probabilité d'un évènement A.

Partie A

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le client interrogé soit un homme et ait mangé un dessert.
3. Montrer que $p(D) = 0,66$.
4. Le client interrogé affirme avoir pris un dessert. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

Partie B

On rappelle que d'après cette enquête, la probabilité pour qu'un client ait mangé un dessert est de 0,66.

La chaine de restaurant souhaite estimer le nombre de dessert à préparer à l'avance pour une salle de 60 personnes. Elle suppose alors que le choix des clients se fait de façon identique et indépendantes de celui de autres.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de clients qui veulent un dessert.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ?
2. Calculer la probabilité que 50 personnes souhaitent un dessert.
3. Quelle est la probabilité que moins de 10 clients souhaitent un dessert ?
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur minimale de a telle que $P(X \leq a) > 0,95$. Interpréter le résultat.