Exercice 1

1. (c)
2. (b) car $1+2+2^2+\dots+2^{12} = \frac{1-2^{13}}{1-2} = 8191$
3. (a)
4. (c)

Exercice 2

$u_0 = 10000$

1) $u_1 = 0,75 \times 10000 + 3000 = 10500$

Au 1er mars 2016, il y aura 10500 voitures.

2) On a $u_{n+1} = 0,75\, u_n + 3000$

3) (a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 12000 = 0,75 u_n + 3000 - 12000 = 0,75 u_n - 9000$

or $u_n = v_n + 12000$ donc $v_{n+1} = 0,75 \times (v_n + 12000) - 9000$

$v_{n+1} = 0,75\, v_n$

donc (v_n) est la suite géométrique de raison $q = 0,75$

et de premier terme $v_0 = u_0 - 12000 = -2000$

(b) $v_n = v_0 \times q^n$ donc $v_n = -2000 \times 0,75^n$

(c) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,75^n = 0$

(d) $u_n = v_n + 12000 = 12000 - 2000 \times 0,75^n$

(e) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 12000$ donc au bout d'un grand nombre d'années le parc comptera 12 000 voitures.

4) (a)

```
U prend la valeur 10000
N prend la valeur 0
Tant que U < 11 950
    N prend la valeur N+1
    U prend la valeur 0,75U + 3000
Fin tant que
Afficher N
```

(b) On cherche n pour que $12000 - 0,75^n \times 2000 \geqslant 11950$

$-2000 \times 0,75^n \geqslant -50$

$0,75^n \leqslant 0,025$

à partir de $n = 13$

donc à partir de 2028.

Exercice 4

Partie A

1) Le coût est minimal pour 4,5 t de granulés.

2) (a) $C(6) = 5$ et $R(6) = 18$

donc $D(6) = R(6) - C(6) = 13$

Le résultat net est alors de 1300 €.

(b) Pour dégager un bénéfice, l'entreprise doit produire et vendre entre 2,8 et 13,3 t de granulés.

Partie B

$$g(x) = -0{,}6x + 4 + e^{-x+5}$$

1) (a) $g'(x) = -0{,}6 - e^{-x+5}$

(b) On constate que $g'(x) < 0$ pour tout $x \in [1;15]$

donc g est décroissante sur $[1;15]$.

2) (a)

x	1		α		15
$g'(x)$		$-$			
$g(x)$	58	$\searrow$	0	$\searrow$	-5

(b) La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[1;15]$.
De plus $g(1) < 0 < g(15)$

donc il existe une unique solution $\alpha \in [1;15]$

telle que $g(\alpha) = 0$.

Avec la calculatrice, on obtient $\alpha \approx 6{,}9$.

(c)

x	1		α		15
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie C

1) $D(x) = R(x) - C(x) = 3x - (0{,}3x^2 - x + e^{-x+5}) = -0{,}3x^2 + 4x - e^{-x+5}$

2) $D'(x) = -0{,}6x + e^{-x+5} = g(x)$

3) D'après le tableau ci-dessus :

x	1		α		15
$D'(x)$		$+$	0	$-$	
$D(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

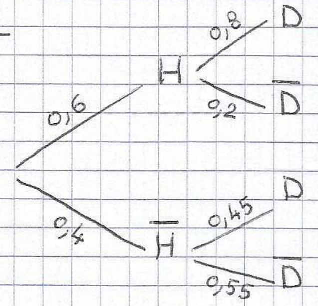
4) (a) Le bénéfice est maximal pour 6,9 t de granulés.

(b) $D(6{,}9) = 13{,}17$ soit 1317 euros.

Exercice 5

Partie A

1)



2) $P(H \cap D) = P(H) \times P_H(D) = 0{,}6 \times 0{,}8 = 0{,}48$

3) $P(D) = P(H \cap D) + P(\overline{H} \cap D) = 0{,}48 + 0{,}4 \times 0{,}45 = 0{,}48 + 0{,}18 = 0{,}66$

4) $P_D(\overline{H}) = \dfrac{P(\overline{H} \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}18}{0{,}66} \approx 0{,}273$

Partie B

1) On répète 60 fois une épreuve de Bernoulli (le succès est "le client veut un dessert") donc on est dans le cadre d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 60$ et $p = 0{,}66$.
La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc X suit la loi binomiale de paramètre $n = 60$ et $p = 0{,}66$.

2) $P(X = 50) = \binom{60}{50} \times 0{,}66^{50} \times 0{,}34^{10} \approx 0{,}001$.

3) $P(X \leqslant 9) = 5 \times 10^{-16}$

4) $P(X \leqslant a) > 0{,}95$ pour $a = 46$

$P(X \leqslant 46)$ la probabilité qu'au moins 46 clients souhaitent un dessert est supérieure à 0,95.