Exercice 1 — Clinker

Le clinker est un constituant du ciment qui résulte de la cuisson d'un mélange composé de calcaire et d'argile. La fabrication du clinker nécessite des fours à très haute température qui libèrent dans l'air une grande quantité de dioxyde de carbone (CO_2).

Dans une cimenterie, la fabrication du clinker s'effectue de 7 h 30 à 20 h, dans une pièce de volume 900 000 dm^3.

À 20 h, après une journée de travail, le taux volumique de CO_2 dans la pièce est de 0,6 %.

1. Justifier que le volume de CO_2 présent dans cette pièce à 20 h est de 5 400 dm^3 .
2. Pour diminuer ce taux de CO_2 durant la nuit, l'entreprise a installé dans la pièce une colonne de ventilation. Le volume de CO_2, exprimé en dm^3, est alors modélisé par une fonction du temps t écoulé après 20 h, exprimé en minutes. t varie ainsi dans l'intervalle [0; 690] puisqu'il y a 690 minutes entre 20 h et 7 h 30.

   On admet que cette fonction V, définie et dérivable sur l'intervalle [0; 690] est une solution, sur cet intervalle, de l'équation différentielle
   $$(E) : y' + 0,01y = 4,5.$$
   (a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E).

   (b) Vérifier que pour tout réel t de l'intervalle [0; 690], $V(t) = 4\,950\mathrm{e}^{-0,01t} + 450$.
3. Quel sera, au dm^3 près, le volume de CO_2 dans cette pièce à 21 h ?
4. Les responsables de la cimenterie affirment que chaque matin à 7 h 30 le taux de CO_2 dans cette pièce est inférieur à 0,06 %.

   Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.
5. Déterminer l'heure à partir de laquelle le volume de CO_2 dans la pièce deviendra inférieur à 900 dm^3.

Exercice 2 — Essence

L'octane est un hydrocarbure qui entre dans la composition de l'essence.

Lorsqu'on chauffe un mélange d'octane et de solvant dans une cuve, une réaction chimique transforme progressivement l'octane en un carburant plus performant, appelé iso-octane.

La concentration d'octane, en moles par litre, dans la cuve est modélisée par une fonction f du temps t, exprimé en minutes. On admet que cette fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, est une solution, sur cet intervalle, de l'équation différentielle suivante :
$$(E)\ :\ y' + 0,12y = 0,003.$$
À l'instant $t = 0$, la concentration d'octane dans la cuve est de $0,5$ mole par litre (mol.L^{-1}).

1. (a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E).

   (b) Donner $f(0)$.

   (c) Vérifier que la fonction f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = 0,475\,\mathrm{e}^{-0,12t} + 0,025$.
2. (a) Calculer la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

   (c) Interpréter cette réponse dans le contexte de l'exercice.
3. Calculer, en justifiant votre réponse, à la minute près, le temps nécessaire pour obtenirune concentration en octane dans la cuve de $0,25$ mole par litre.
4. (a) Par une lecture graphique, déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

   Interpréter le résultat dans le contexte.

   (b) Le processus de transformation de l'octane en iso-octane est arrêté au bout d'une heure. Expliquer ce choix.