DS 4

Terminale STI2D – 18 décembre 2019

Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.

Une part importante de la note sera dédiée à la rédaction, aux explications et à l'utilisation des notations mathématiques.

Exercice 1 — QCM(/4)

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse n'ajoutent ni ne retirent aucun point.
Inscrire sur la copie la référence de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. Le nombre -3 est solution de l'équation

   a) $\ln(x) = -\ln(3)$ b) $\ln(e^x) = -3$ c) $e^{ln(x)} = 3$ d) $e^x = 3$

2. Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[2\,;12]$. $P(X \geq 5)$ est égale à

   a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{10}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{5}{7}$

3. $(4i-2)(3i+1)$ est égale à

   a) $-14-2i$ b) $10i-2$ c) $10-2i$ d) $10-10i$

4. La forme factorisée de $xe^{-0.2x} - (3+2x)e^{-0.2x}$ est

   a) $(-3+3x)e^{-0.2x}$ b) $2e^{-0.2x}(-3+3x)$ c) $(-3+x)e^{-0.2x}$ d) $2e^{-0.2x}$

Exercice 2 — Température intérieur(/12)

En plein hiver, en Europe, une maison est chauffée à 20^oC.

La température extérieure est notée T . Dans tout l'exercice, on suppose que $T < 20$. Température intérieure initiale 20^oC

Lorsque le chauffage est coupé, la température intérieure diminue par perte de chaleur.

On modélise cette situation par une suite (u_n) dont le terme général u_n désigne la température intérieure de la maison n heures après la coupure du chauffage.

Pour une maison en maçonnerie traditionnelle et une température extérieure T constante, on admet que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,99u_n + \frac{T}{100} \quad \text{et} \quad u_0 = 20.$$

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

On suppose que la température extérieure T est égale à 0 °C. On a donc $T = 0$.

1. Calculer les termes u_1 et u_2.
2. Montrer que, dans ce cas, la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n). Justifier.
4. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n < 5$. En déduire le nombre de jours à partir duquel la température intérieure est descendue en dessous de 5 °C.

Partie B

On suppose que la température extérieure T est égale à -10 °C. On a donc $T = -10$.

1. Montrer que, dans ce cas, la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 0,99u_n - 0,10 \quad \text{et} \quad u_0 = 20.$$

2. (a) Calculer les termes u_1 et u_2.

   (b) Dans ce cas, la suite (u_n) est-elle géométrique ? Justifier la réponse.

   (c) On définit (v_n) par $v_n = u_n + 10$. Démontrer que l'on a alors

$$v_{n+1} = 0.99v_n$$

   (d) Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Quels sont les éléments caractéristiques ?

   (e) Exprimer v_n en fonction de u_n.

(f) En déduire que

$$u_n = 30 \times 0.99^n - 10$$

(g) Quelle est la limite de u_n ?

3. On souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, le nombre d'heures à partir duquel la température intérieure devient strictement inférieure à 5 °C. On utilise pour cela l'algorithme incomplet ci-contre dans lequel U désigne un nombre réel et N un nombre entier naturel.

   Recopier et compléter l'algorithme.

```
U ← 20
N ← 0
Tant que ...
    U ← ...
    N ← ...
Fin Tant que
```

Exercice 3 — Système de climatisation(/3)

Dans cet exercice, on s'intéresse aux batteries des voitures électriques. La charge (énergie restituable) est exprimée en kilowattheure.

Conformément à l'usage commercial, on appelle capacité la charge complète d'une batterie.

On dispose des renseignements suivants :

Document 1 :
Caractéristiques des bornes de recharge

Recharge	Tension (V)	Intensité (A)
Normal	230	16
Semi-rapide	400	16
Rapide	400	63

Document 2 :
Exemple de capacités de batterie

- Marque A : 22kWh
- Marque B : 24kWh
- Marque C : 33kWh
- Marque D : 60kWh

Document 3 :
Bon à savoir pour une batterie vide
Après 50% de temps de charge complète, la batterie est à environ 80% de sa capacité de charge

1. La puissance de charge P d'une borne de recharge, exprimée en Watt (W), s'obtient en multipliant sa tension U, exprimée en Volt (V), par son intensité I, exprimée en Ampère (A).

   Dans la pratique, on considère que le temps T de charge complète d'une batterie vide, exprimé en heure (h), s'obtient en divisant la capacité C de la batterie, exprimée usuellement en kilowattheure (kWh), par la puissance de charge P de la borne de recharge exprimée en kilowatt (kW).

   On considère une batterie de la marque D.

   Déterminer le temps de charge complète de cette batterie sur une borne de recharge « Rapide ». Exprimer le résultat en heures et minutes.

2. Lors du branchement d'une batterie vide de marque A sur une borne de recharge de type « Normal », la charge (en kWh) en fonction du temps (en heure) est modélisée par une fonction f définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$:

$$f(t) = -22e^{-0.55t} + 22$$

   (a) On a tracer la courbe représentative de f ci-contre. Quelle semble être la limite de f quand x tend vers plus l'infini ?

   (b) La durée de demi-charge est le temps nécessaire pour que la batterie soit chargée à 50 %. Résoudre sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(t) = 11$ et en déduire la durée d'une demi-charge, exprimée en heure et minute.

   (c) (bonus) Dans la pratique, on considère que le temps de charge complète de ce type de batterie est d'environ 6 heures.
   Vérifier l'affirmation 3