DS 4

Terminale L-ES – 20 décembre 2019

Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.

Une part importante de la note sera dédiée à la rédaction, aux explications et à l'utilisation des notations mathématiques.

Exercice 1 — Gestion d'un parc de vélos

Afin de conserver au fil des années un parc en bon état, un loueur de vélos se sépare chaque hiver de 20 % de son stock et achète ensuite 35 nouveaux vélos.

On modélise la situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de vélos présents dans le stock de ce loueur au 1er juillet de l'année $(2018+n)$.

Au 1er juillet 2018, le loueur possède 150 vélos, ainsi $u_0 = 150$.

1. (a) Déterminer le nombre de vélos dans le stock du loueur au 1er juillet 2019.

   (b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,8u_n + 35$.

2. On a calculé les premiers termes de cette suite à l'aide d'un tableur.
   Une copie d'écran est donnée ci-dessous :

	A	B
1	rang n	terme u_n
2	0	150
3	1	155
4	2	159
5	3	162,2

   (a) Quelle formule peut-on saisir dans la cellule B3 pour obtenir, par copie vers le bas, les termes successifs de la suite (u_n) ?

   (b) Pour les termes de rang 36, 37, 38, 39 et 40, on obtient les résultats suivants (arrondis au millième) :

38	36	174,992
39	37	174,994
40	38	174,995
41	39	174,996
42	40	174,997

   Conjecturer la limite de la suite (u_n).

3. *Dans cette question, on cherche à démontrer la conjecture émise à la question précédente.*
   Pour cela, on pose pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 175$.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = -25 \times 0,8^n + 175$.

   (c) Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

4. On admet que la suite (u_n) est croissante. On veut déterminer la plus petite valeur de n tels que : $u_n \geqslant 170$.

   (a) Compléter l'algorithme en annexe pour trouver cette valeur.

   (b) Exécuter cet algorithme pour trouver la valeur de n. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 Club de foot

Un club de football est composé d'équipes adultes masculines, adultes féminines et d'équipes d'enfants. Chaque week-end, la présidente Claire assiste au match d'une seule des équipes du club et elle suit :

- dans 10 % des cas, le match d'une équipe adulte féminine ;
- dans 40 % des cas, le match d'une équipe adulte masculine ;
- dans les autres cas, le match d'une équipe d'enfants.

Lorsqu'elle assiste au match d'une équipe masculine, la probabilité que celle-ci gagne est $0,6$. Lorsqu'elle assiste au match d'une équipe d'enfants, la probabilité que celle-ci gagne est $0,54$.

La probabilité que Claire voie l'équipe de son club gagner est $0,58$.

On choisit un week-end au hasard. On note les évènements suivants :

- F : « Claire assiste au match d'une équipe adulte féminine » ;
- M : « Claire assiste au match d'une équipe adulte masculine » ;
- E : « Claire assiste au match d'une équipe d'enfants » ;
- G : « l'équipe du club de Claire gagne le match ».

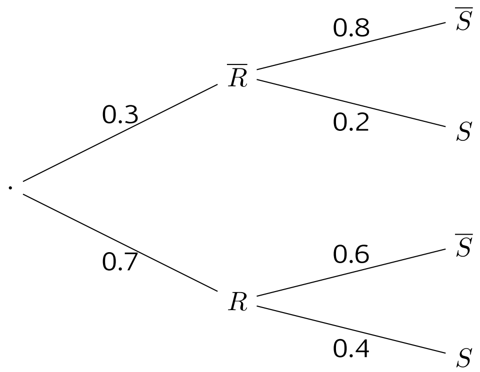
Pour tous évènements A et B, on note $\overline{A}$ l'évènement contraire de A, $p(A)$ la probabilité de A et, si B est de probabilité non nulle, $p_B(A)$ la probabilité de A sachant B.

1. L'arbre de probabilité est donné en **annexe**. Le compléter au fur et à mesure de l'exercice.
2. Déterminer la probabilité $p(M \cap G)$.
3. (a) Démontrer que $p(F \cap G) = 0,07$.
   (b) En déduire $p_F(G)$.
   (c) La probabilité que l'équipe adulte féminine gagne un match est $0,47$. La présence de Claire semble-t-elle favoriser la victoire de l'équipe adulte féminine ?
4. Claire annonce avoir assisté à la victoire d'une équipe du club. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi le match d'une équipe adulte féminine ?

Exercice 3 Vrai ou Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

1. On considère l'arbre pondéré suivant :



   Affirmation 1 : La probabilité de $\overline{R}$ sachant S est $0,06$.

2. Soit k un réel tel que $0 \leqslant k < 18$. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[k\,;\,18]$. On suppose que l'espérance de X est égale à 12.

   Affirmation 2 : La valeur de k est 9.

3. Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,15]$. On suppose que sa fonction dérivée, notée f', est continue sur $[0\,;\,15]$. Les variations de f' sont représentées dans le tableau ci-dessous.

x	0	5	15
$f'(x)$	30	↘ -5 ↗	10

Affirmation 3 : La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f admet une et une seule tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Affirmation 4 : La fonction f est convexe sur $[5\,;\,15]$.