DS 3

Terminale ES-L – 27 novembre 2019

Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.

Une part importante de la note sera dédiée à la rédaction, aux explications et à l'utilisation des notations mathématiques.

Exercice 1 — Grand jeu(/6)

Une grande enseigne décide d'organiser un jeu permettant de gagner un bon d'achat. Le jeu se déroule en deux étapes :

- **Étape 1** : chaque client tire au hasard une carte sur laquelle figure un nombre de 1 à 50, chaque numéro ayant la même probabilité d'être découvert ;
- **Étape 2** :
  - — s'il découvre un numéro compris entre 1 et 15, il fait tourner une roue divisée en 10 secteurs de même taille dont 8 secteurs contiennent une étoile ;
  - — sinon, il fait tourner une autre roue divisée elle aussi en 10 secteurs de même taille dont un seul secteur contient une étoile.

Un bon d'achat est gagné par le client si la roue s'arrête sur une étoile.

Un client joue à ce jeu. On note :
N l'évènement « Le client découvre un numéro entre 1 et 15 » ;
E l'évènement « Le client obtient une étoile ».

1. (a) Justifier que $P(N) = 0,3$ et que $P_N(E) = 0,8$.
   (b) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le client trouve un numéro entre 1 et 15 et une étoile.
3. Justifier que la probabilité que le client gagne un bon d'achat est égale à $0,31$.
4. Le client a gagné un bon d'achat. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu un numéro entre 1 et 15 à la première étape ?

Solution 1

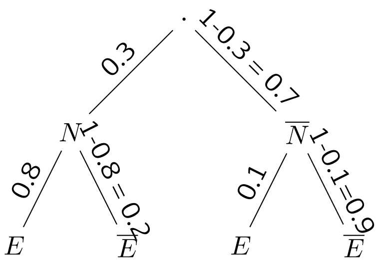
6 p.

1. (a)

$$P(N) = \frac{15}{50} = 0.3$$

$$P_N(E) = \frac{8}{10} = 0.8$$

(b)



(c)

$$P(E \cap N) = P(N) \times P_N(E) = 0.3 \times 0.8 = 0.24$$

(d) Un client gagne le bon d'achat quand il arrive sur une étoile.

$$P(E) = P(E \cap N) + P(E \cap \overline{N}) = 0.24 + 0.7 \times 0.1 = 0.31$$

(e)

$$P_E(N) = \frac{P(E \cap N)}{P(E)} = \frac{0.24}{0.31} = 0.77$$

Exercice 2 — Autour de l'exponentiel(/5)

1. (a) Développer puis réduire
$$A = e^{2x}(e^{-x} + 3)$$
   (b) Factoriser
$$B = (x+1)e^{5x} - 2xe^{5x}$$
   (c) Résoudre l'équation
$$e^{3x-5} > e^{5x+2}$$
2. En 2002, la culture de plantation d'OGM occupait une surface de 59,2 milions d'hectares dans le monde. On peut modéliser la surface dédiée au plantation OGM à l'année $2002 + x$ par la fonction
$$s(x) = 59.2 \times 1.15^x$$
   (a) Quelle est le sens de variation de cette fonction ?
   (b) Calculer $\dfrac{s(x+1) - s(x)}{s(x)}$ et interpréter le résultat.

Solution 2

5 p.

1. (a)
$$\begin{array}{rcl} A & = & e^{2x}(e^{-x} + 3) \\ A & = & e^{2x-x} + 3 \times e^{2x} \\ A & = & e^{x} + 3 \times e^{2x} \end{array}$$
   (b)
$$\begin{array}{rcl} B & = & (x+1)e^{5x} - 2xe^{5x} \\ B & = & (x+1-2x)^{5x} \\ B & = & (-x+1)^{5x} \end{array}$$
   (c)
$$\begin{array}{rcl} e^{3x-5} & > & e^{5x+2} \\ 3x-5 & > & 5x+2 \\ 3x-5x & > & 2+5 \\ -2x & > & 7 \\ x & < & \dfrac{7}{-2} = \dfrac{-7}{2} \end{array}$$
2. (a) Comme $1.15 > 1$ alors la fonction $x \mapsto 1.15^x$ est croissante. Comme $59.2 > 0$ alors la fonction s est croissante.
   (b)
$$\begin{array}{rcl} \dfrac{s(x+1) - s(x)}{s(x)} & = & \dfrac{59.2 \times 1.15^{x+1} - 59.2 \times 1.15^x}{59.2 \times 1.15^x} \\ & = & \dfrac{59.2 \times 1.15^x(1.15-1)}{59.2 \times 1.15^x} \\ & = & 1.15 - 1 \\ & = & 0.15 \end{array}$$

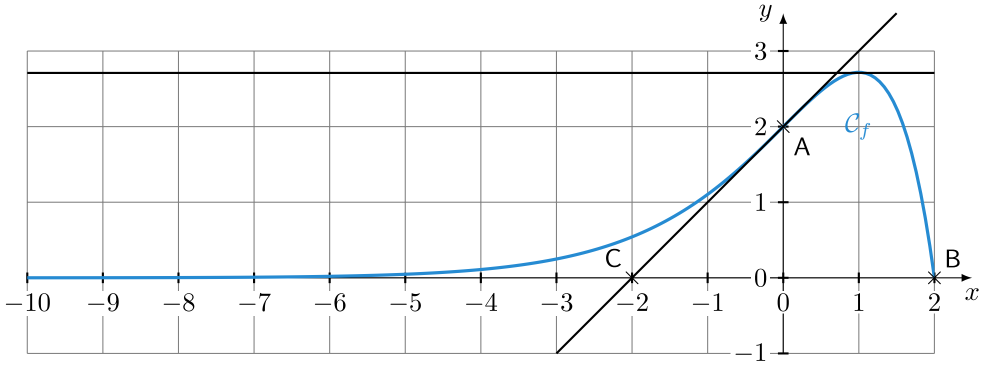
   Ainsi le taux d'évolution de la fonction s est constant et égal à 0.15.

Exercice 3 — Étude graphique(/6)

Dans le repère ci-dessous, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10\ ;\ 2]$. On a placé les points A(0 ; 2), B(2 ; 0) et C$(-2\ ;\ 0)$.

On dispose des renseignements suivants :

- Le point B appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$.
- La droite (AC) est tangente en A à la courbe $\mathcal{C}_f$.
- La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est une droite horizontale.



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.

1. Indiquer les valeurs de $f(0)$ et de $f(2)$.
2. Indiquer la valeur de $f'(1)$.
3. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.
4. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans l'intervalle $[-10\ ;\ 2]$.
5. Indiquer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-10\ ;\ 2]$.
6. Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe, et celui sur lequel elle est concave.

Solution 3

6 p.

1. $f(0) = 2$ (point $A(0\,;\,2)$) et $f(2) = 0$ (point $B(2\,;\,0)$).
2. Au point d'abscisse la tangente à $(C)_f$ est horizontale donc $f'(1) = 0$.
3. La tangente à $(C)_f$ est la droite (AC). Son équation est de la forme : $y = m\,x + p$.
   $m = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{0-2}{-2-0} = 1$ et $p = y_A - m \times x_A = 2 - 1 \times 0 = 2$.
   L'équation de la tangente à $(C)_f$ au point A a pour équation : $y = x + 2$.
4. À l'aide du graphique, on peut affirmer que sur l'intervalle $[-10\,;\,2]$ l'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions distinctes l'une positive, l'autre négative.
5. La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-10\,;\,1]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.
6. La tangente à $(C)_f$ au point d'abscisse 0 (point A) coupe la courbe : le point A est donc un point d'inflexion. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-10\,;\,0]$ et concave

Exercice 4 — Technique(/3)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2x^2 - 7x - 4 \geq 0$.
2. On choisit un nombre au hasard dans l'intervalle $[0\,;\,10]$. Calculer la probabilité que ce nombre soit solution de l'inéquation précédente.

Solution 4

3 p.

1. La résolution de l'équation passe par l'étude de signe de la fonction

$$f(x) = 2x^2 - 7x - 4$$

Calcul du discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 81 = 9^2$$

Δ est strictement positif donc la fonction f a deux racines.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-9}{2\times 2} = \frac{-1}{2}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+9}{2\times 2} = 4$$

Comme $a = 2 > 0$, f est positive en dehors des racines.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $2x^2 - 7x - 4 \geq 0$ a pour solution $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right] \cup [4\,;+\infty[$

2. On note X la variable aléatoire associée à cette expérience.

$$P(X \text{ solution de l'inéquation }) = P(X > 4) = \frac{6}{10} = 0.6$$