# DS 5

**Terminale L-ES – 22 janvier 2020**

Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.

## Exercice 1 — Tirelire(/12)

Maya possède 20 € dans sa tirelire au 1er juin 2018.

À partir de cette date, chaque mois elle dépense un quart du contenu de sa tirelire puis y place $20$ € supplémentaires.

Pour tout entier naturel $n$, on note $u_n$ la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du $n$-ième mois. On a $u_0 = 20$.

1. (a) Montrer que la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du 1er mois est de $35$ €.
   (b) Calculer $u_2$.
2. On admet que pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 0,75u_n + 20$.
   On considère l'algorithme suivant :

```
U ⟵ 20
N ⟵ 0
Tant que U < 70
        U ⟵ 0,75 × U + 20
        N ⟵ N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

   (a) Recopier et compléter le tableau ci-contre qui retrace les différentes étapes de l'exécution de l'algorithme. On ajoutera autant de colonnes que nécessaire à la suite de ce tableau. Arrondir les résultats au centième.

| $U$ | $N$ | $U < 70$ |
|---|---|---|
| 20 | 0 | Vrai |
| ... | ... | ... |

   (b) Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ?
   Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
3. Pour tout entier $n$, on pose $v_n = u_n - 80$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $0,75$.
   (b) Préciser son premier terme $v_0$.
   (c) En déduire que, pour tout entier $n$, $u_n = 80 - 60 \times 0,75^n$.
   (d) Déterminer, au centime près, le montant que Maya possèdera dans sa tirelire au 1er juin 2019.
   (e) Déterminer la limite de la suite $(v_n)$.
   (f) En déduire la limite de la suite $(u_n)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

## Solution 1

12 p.

1. (a) Elle dépense le quart des 20 euros de départ, donc il lui reste les trois quarts de la somme, soit 15 euros. Puis elle ajoute 20 euros. Donc elle aura 35 euros le mois suivant. Donc
   $u_1 = 35$.
   (b) $u_2 = 0,75 \times 35 + 20 = 46,25$.
2. (a) On complète le tableau ci-dessous qui retrace les différentes étapes de l'exécution de l'algorithme en arrondissant les résultats au centième :

| Valeur de $U$ | 20 | 35 | 46,25 | 54,69 | 61,02 | 67,76 | 69,32 | 71,99 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valeur de $N$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Condition $U < 70$ | vrai | vrai | vrai | vrai | vrai | vrai | vrai | faux |

   (b) Cet algorithme affiche la valeur $N = 7$ ; donc au bout du 7e mois la somme disponible sera supérieure à 70 euros.

3. Pour tout entier $n$, on pose $v_n = u_n - 80$.

   (a) Pour tout entier $n$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 80 = 0,75 \times u_n + 20 - 80 = 0,75 \times u_n - 60 = 0,75\left(u_n - \dfrac{60}{0,75}\right) = 0,75 \times (u_n - 80) = 0,75 \times v_n$.
   Donc la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $0,75$.

   (b) $v_0 = u_0 - 80 = 20 - 80 = -60$.

   (c) Pour tout entier $n$, $v_n = v_0 \times q^n = -60 \times 0,75^n$.
   De plus $u_n = v_n + 80 = -60 \times 0,75^n + 80 = 80 - 60 \times 0,75^n$.

   (d) Pour trouver le montant que Maya possèdera dans sa tirelire au 1er juin 2019, on cherche la somme disponible fin mai 2019, ce qui correspond à $n = 12$ : $u_{12} = 80 - 60 \times 0,75^{12} \approx 78,10$.
   Maya aura dans sa tirelire le 1er juin 2019 78,10 €.

   (e) La raison de la suite géométrique $(v_n)$ est strictement comprise entre $-1$ et 1, donc sa limite quand $n$ tend vers l'infini est égale à 0.

   (f) Donc la limite de la suite $(u_n)$ est égale à 80; cela signifie que le contenu de la tirelire va avoir tendance à se stabiliser vers 80 € au bout d'un certain temps.

## Exercice 2 — Satisfaction(/12)

On appelle fonction « *satisfaction* » toute fonction dérivable qui prend ses valeurs entre 0 et 100. Lorsque la fonction « *satisfaction* » atteint la valeur $100$, on dit qu'il y a « *saturation* ».

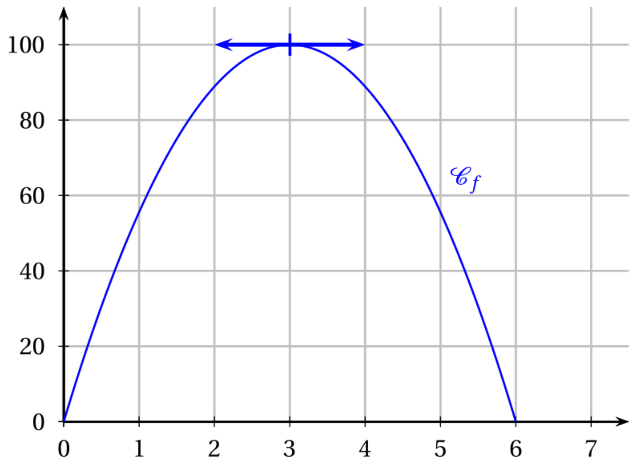
On définit aussi la fonction « *envie* » comme la fonction dérivée de la fonction « *satisfaction* ». On dira qu'il y a « *souhait* » lorsque la fonction « *envie* » est positive ou nulle et qu'il y a « *rejet* » lorsque la fonction « *envie* » est strictement négative.

**Dans chaque partie, on teste un modèle de fonction « *satisfaction* » différent.**

**Les parties A, B et C sont indépendantes.**

**Partie A**

Un étudiant prépare un concours, pour lequel sa durée de travail varie entre 0 et 6 heures par jour. Il modélise sa satisfaction en fonction de son temps de travail quotidien par la fonction « *satisfaction* » $f$ dont la courbe représentative est donnée ci-contre ($x$ est exprimé en heures).




**Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes.**

1. Lire la durée de travail quotidien menant à « *saturation* ».
2. Déterminer à partir de quelle durée de travail il y a « *rejet* ».

**Partie B**

Le directeur d'une agence de trekking modélise la satisfaction de ses clients en fonction de la durée de leur séjour. On admet que la fonction « *satisfaction* » $g$ est définie sur l'intervalle $[0\,;\,30]$ par $g(x) = 12,5xe^{-0,125x+1}$ ($x$ est exprimé en jour).

1. Démontrer que, pour tout $x$ de l'intervalle $[0\,;\,30]$,

$$g'(x) = (12,5 - 1{,}562\,5x)e^{-0,125x+1}.$$

2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,30]$ puis dresser le tableau des variations de $g$ sur cet intervalle.
3. Quelle durée de séjour correspond-elle à l'effet « *saturation* » ?
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 50$ admet 2 solutions sur $[0\,;30]$.

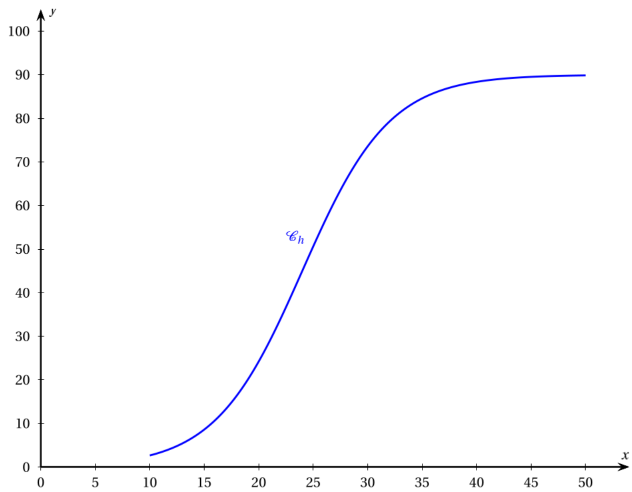
**Partie C**

La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction « *satisfaction* » $h$, est définie sur l'intervalle $[10\,;\,50]$ par

$$h(x) = \frac{90}{1 + e^{-0,25x+6}}$$

($x$ est exprimé en millier d'euros).

La courbe $\mathcal{C}_h$ de la fonction $h$ est représentée ci-contre.




Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

| | |
|---|---|
| 1 | `Dériver(90/(1 + exp(-0.25 * x +6)))` $\dfrac{22,5e^{-0,25x+6}}{(1+e^{-0,25x+6})^2}$ |
| 2 | `Dériver(22.5 * exp(-0,25 x + 6)/(1 + exp(-0,25 * x + 6))^2` $\dfrac{5,625e^{-0,25x+6}(e^{-0,25x+6}-1)}{(1+e^{-0,25x+6})^3}$ |

1. Donner sans justification une expression de $h''(x)$.
2. Expliquer que $h''(x)$ est du même signe que $e^{-0.25x+6} - 1$.
3. Démontrer que dans l'intervalle $[10\,;\,50]$ l'inéquation $e^{-0,25x+6} - 1 > 0$ a pour solution $x < 24$.
4. Étudier la convexité de la fonction $h$ sur l'intervalle $[10\,;\,50]$.
5. À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « *envie* » décroît ? Justifier.

## Solution 2

12 p.

### Partie A

1. Il y a « *saturation* » au bout de 3 heures de travail.
2. Il y a « *rejet* » quand la fonction est décroissante, donc après 3 heures de travail.

### Partie B

1. Pour tout $x$ de l'intervalle $[0\,;\,30]$ :
$g'(x) = 12,5 \times e^{-0,125x+1} + 12,5x \times (-0,125)e^{-0,125x+1} = (12,5 - 1{,}562\,5x)e^{-0,125x+1}$.
2. Pour tout $x$, $e^{-0,125x+1} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $12,5 - 1{,}562\,5x$.
$12,5 - 1{,}562\,5x > 0 \iff 12,5 > 1{,}562\,5x \iff \dfrac{12,5}{1{,}562\,5} > x \iff x < 8$
$g(0) = 0$, $g(8) = 100$ et $g(30) \approx 24$
On établit le tableau des variations de la fonction $g$ sur $[0\,;\,30]$ :

| $x$ | $0$ | | $8$ | | $30$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | + | $0$ | - | |
| $g(x)$ | $0$ | ↗ | $100$ | ↘ | $f(30) \approx 24$ |

3. D'après le tableau de variations, l'effet « *saturation* » apparaît au bout d'un séjour de 8 jours.
4. On va appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur les intervalles $[0\,;8]$ et $[8\,;30]$.
   - $g(0) = 0$ et $g(8) = 100$
   - $g$ est une fonction continue et strictement croissante sur $[0\,;8]$
   - $50 \in [0\,;100]$

   Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 50$ a une unique solution sur $[0\,;8]$.
   On peut faire la même chose sur l'intervalle $[8\,;30]$ démontrer qu'il y a une unique solution sur cet intervalle.
   L'équation a donc 2 solutions sur $[0\,;30]$

### Partie C

1. D'après le logiciel de calcul formel, $h''(x) = \dfrac{5,625e^{-0,25x+6}(e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3}$.
2. Pour tout $x$, $e^x > 0$ donc, pour tout $x$, $e^{-0,25x+6} > 0$ ;
on en déduit que $\left(1 + e^{-0,25x+6}\right)^3 > 0$ et que $5,625e^{-0,25x+6} > 0$,
et donc que $h''(x)$ est du signe de $e^{-0,25x+6} - 1$.
3. On résout dans l'intervalle $[10\,;\,50]$ l'inéquation $e^{-0,25x+6} - 1 > 0$ :

$$\begin{aligned} e^{-0,25x+6} - 1 > 0 &\iff e^{-0,25x+6} > 1 \iff -0,25x + 6 > 0 \\ &\iff 6 > 0,25x \iff \frac{6}{0,25} > x \\ &\iff 24 > x \end{aligned}$$

   Sur l'intervalle $[10\,;\,50]$, l'inéquation $e^{-0,25x+6} - 1 > 0$ a pour solution l'intervalle $[10\,;\,24[$.
4. La fonction $h$ est convexe sur les intervalles sur lesquels sa dérivée est croissante, c'est-à-dire quand sa dérivée seconde est positive.
$h''(x) = \dfrac{5,625e^{-0,25x+6}(e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3}$
D'après la question précédente, on peut dire que :
   - $h''(x) > 0$ sur $[10\,;\,24[$ donc la fonction $h$ est convexe sur $[10\,;\,24[$ ;
   - $h''(x) < 0$ sur $]24\,;\,50]$ donc la fonction $h$ est concave sur $]24\,;\,50]$.
5. La fonction « *envie* » décroit quand $h'$ décroit donc quand $h''$ devient négative, soit à partir de $x = 24$, ce qui correspond à un salaire annuel de $24\,000$ euros.