DS 4

Terminale L-ES – 20 décembre 2019

Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.

Une part importante de la note sera dédiée à la rédaction, aux explications et à l'utilisation des notations mathématiques.

Exercice 1 — Gestion d'un parc de vélos

Afin de conserver au fil des années un parc en bon état, un loueur de vélos se sépare chaque hiver de 20 % de son stock et achète ensuite 35 nouveaux vélos.

On modélise la situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de vélos présents dans le stock de ce loueur au 1er juillet de l'année $(2018+n)$.

Au 1er juillet 2018, le loueur possède 150 vélos, ainsi $u_0 = 150$.

1. (a) Déterminer le nombre de vélos dans le stock du loueur au 1er juillet 2019.
   (b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,8u_n + 35$.
2. On a calculé les premiers termes de cette suite à l'aide d'un tableur.
   Une copie d'écran est donnée ci-dessous :

	A	B
1	rang n	terme u_n
2	0	150
3	1	155
4	2	159
5	3	162,2

   (a) Quelle formule peut-on saisir dans la cellule B3 pour obtenir, par copie vers le bas, les termes successifs de la suite (u_n) ?
   (b) Pour les termes de rang 36, 37, 38, 39 et 40, on obtient les résultats suivants (arrondis au millième) :

38	36	174,992
39	37	174,994
40	38	174,995
41	39	174,996
42	40	174,997

   Conjecturer la limite de la suite (u_n).
3. *Dans cette question, on cherche à démontrer la conjecture émise à la question précédente.*
   Pour cela, on pose pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 175$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = -25 \times 0,8^n + 175$.
   (c) Déterminer alors la limite de la suite (u_n).
4. On admet que la suite (u_n) est croissante. On veut déterminer la plus petite valeur de n tels que : $u_n \geqslant 170$.
   (a) Compléter l'algorithme en annexe pour trouver cette valeur.
   (b) Exécuter cet algorithme pour trouver la valeur de n. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Solution 1

1. (a) $u_1 = 150 \times 0,8 + 35 = 155$. Au 1er juillet 2019, le loueur aura 155 vélos.
   (b) Le terme u_n correspond au nombre de vélos l'année $(2018+n)$, u_{n+1} le nombre de vélos l'année suivante. D'une année à l'autre il vend 20 % de son stock, il lui en reste donc 80 % soit $0,8 \times u_n$. Puis il ajoute 35 nouveaux vélos. Donc il aura l'année suivante $0,8 \times u_n + 35$.
   Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,8u_n + 35$

2. (a) Dans la cellule $B3$, il faut saisir : $= 0,8 * \text{B2} + 35$

   (b) Le tableau donnant les termes de la suite pour n allant de 38 à 42 permet de conjecturer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 175$

3. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 175$

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 175 = 0,8u_n + 35 - 175 = 0,8u_n - 140 = 0,8\left(u_n - \dfrac{140}{0,8}\right) = 0,8(u_n - 175) = 0,8v_n$

   Donc la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 175 = -25$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = -25 \times 0,8^n$.

   De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 175 = -25 \times 0,8^n + 175$.

   (c) La suite géométrique (v_n) a pour raison $q = 0,8$. $q \in]-1\,;\,1[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

   $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n + 175 = 0 + 175 = 175$.

4. (a)

```
u ← 150 ;
n ← 0 ;
tant que n < 179 faire
    u ← u * 0.9 + 35 ;
    n ← n + 1 ;
fin
```

   (b) En tâtonnant avec la calculatrice, on obtient

$$u_7 = 169,76 \qquad u_8 = 170,8$$

   Donc au bout de 8 années, soit le 1er juillet 2026, le loueur possèdera plus de 170 vélos dans son stock.

Exercice 2 — Club de foot

Un club de football est composé d'équipes adultes masculines, adultes féminines et d'équipes d'enfants. Chaque week-end, la présidente Claire assiste au match d'une seule des équipes du club et elle suit :

- dans 10 % des cas, le match d'une équipe adulte féminine ;
- dans 40 % des cas, le match d'une équipe adulte masculine ;
- dans les autres cas, le match d'une équipe d'enfants.

Lorsqu'elle assiste au match d'une équipe masculine, la probabilité que celle-ci gagne est $0,6$. Lorsqu'elle assiste au match d'une équipe d'enfants, la probabilité que celle-ci gagne est $0,54$.

La probabilité que Claire voie l'équipe de son club gagner est $0,58$.

On choisit un week-end au hasard. On note les évènements suivants :

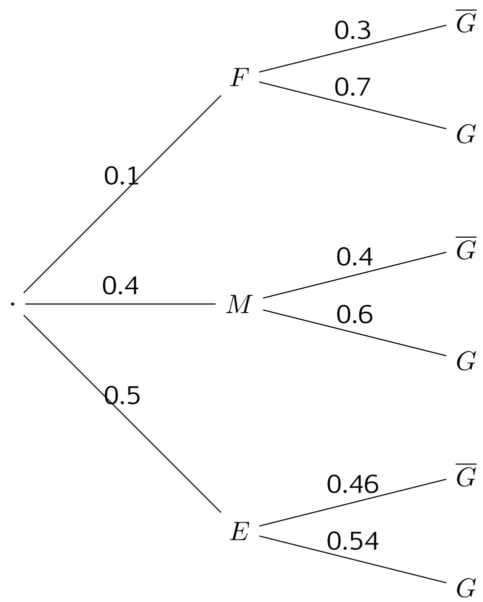
- F : « Claire assiste au match d'une équipe adulte féminine » ;
- M : « Claire assiste au match d'une équipe adulte masculine » ;
- E : « Claire assiste au match d'une équipe d'enfants » ;
- G : « l'équipe du club de Claire gagne le match ».

Pour tous évènements A et B, on note $\overline{A}$ l'évènement contraire de A, $p(A)$ la probabilité de A et, si B est de probabilité non nulle, $p_B(A)$ la probabilité de A sachant B.

1. L'arbre de probabilité est donné en **annexe**. Le compléter au fur et à mesure de l'exercice.
2. Déterminer la probabilité $p(M \cap G)$.
3. (a) Démontrer que $p(F \cap G) = 0,07$.
   (b) En déduire $p_F(G)$.
   (c) La probabilité que l'équipe adulte féminine gagne un match est $0,47$. La présence de Claire semble-t-elle favoriser la victoire de l'équipe adulte féminine ?
4. Claire annonce avoir assisté à la victoire d'une équipe du club. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi le match d'une équipe adulte féminine ?

Solution 2

1.



2. $p(M \cap G) = p(M) \times p_M(G) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$
3. (a) D'après la formule des probabilités totales : $p(G) = p(F \cap G) + p(M \cap G) + p(E \cap G)$.
   On sait que $p(G) = 0,58$ et que $p(M \cap G) = 0,24$.

$$p(E \cap G) = p(E) \times p_E(G) = 0,5 \times 0,54 = 0,27$$

   On en déduit que $p(F \cap G) = p(G) - p(M \cap G) - p(E \cap G) = 0,58 - 0,24 - 0,27 = 0,07$.

(b) $p(F \cap G) = p(F) \times p_F(G)$ donc

$$p_F(G) = \frac{p(F \cap G)}{p(F)} = \frac{0,07}{0,1} = 0,7$$

On peut ainsi compléter l'arbre (voir **annexe**).

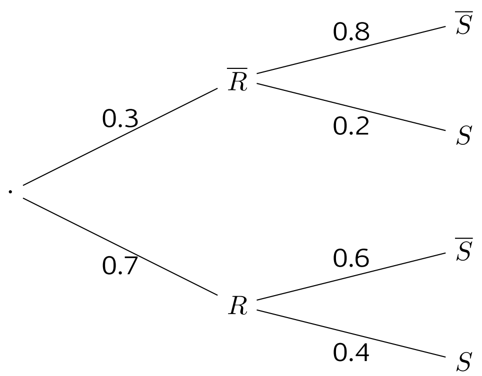
(c) La probabilité que l'équipe adulte féminine gagne un match est $0,47$.
La probabilité que l'équipe féminine gagne un match sachant que Claire a assisté au match est $p_F(G) = 0,7$.
Donc la présence de Claire semble favoriser la victoire de l'équipe féminine.

4. Claire annonce avoir assisté à la victoire d'une équipe de club. La probabilité qu'elle ait suivi le match d'une équipe adulte féminine est $p_G(F) = \dfrac{p(F \cap G)}{p(G)} = \dfrac{0,07}{0,58} \approx 0,12$.

Exercice 3 — Vrai ou Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

1. On considère l'arbre pondéré suivant :



Affirmation 1 : La probabilité de $\overline{R}$ sachant S est $0,06$.

2. Soit k un réel tel que $0 \leqslant k < 18$. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[k\,;\,18]$. On suppose que l'espérance de X est égale à 12.

Affirmation 2 : La valeur de k est 9.

3. Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,15]$. On suppose que sa fonction dérivée, notée f', est continue sur $[0\,;\,15]$. Les variations de f' sont représentées dans le tableau ci-dessous.

x	0		5		15
$f'(x)$	30	↘	-5	↗	10

Affirmation 3 : La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f admet une et une seule tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Affirmation 4 : La fonction f est convexe sur $[5\,;\,15]$.

Solution 3

1. On a $P_S\left(\overline{R}\right) = \dfrac{P\left(S \cap \overline{R}\right)}{P(S)}$.
   - $P\left(S \cap \overline{R}\right) = P\left(\overline{R} \cap S\right) = P\left(\overline{R}\right) \times P_{\overline{R}}(S) = 0,3 \times 0,2 : 0,06$.
   - D'après la loi des probabilités totales :

$P(S) = P(R \cap S) + P\left(\overline{R} \cap S\right) = P(R) \times P_R(S) + P\left(\overline{R}\right) \times P_{\overline{R}}(S) = 0,7 \times 0,4 + 0,3 \times 0,2 = 0,28 + 0,06 = 0,34$.

Donc $\dfrac{P\left(S \cap \overline{R}\right)}{P(S)} = \dfrac{0,6}{0,34} \approx 0,18 \neq 0.06$: l'affirmation est fausse.

2. L'espérance de Xsur $[k\,;\,18]$ est égale à $\dfrac{k+18}{2} = 12 \iff k + 18 = 24 \iff k = 6$: l'affirmation est fausse.

3. **Affirmation 3** : La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f admet une et une seule tangente parallèle à l'axe des abscisses.

   D'après le tableau de variations de f', cette dérivée s'annule sur l'intervalle $[0;5]$ et sur l'intervalle $[5;15]$. Il existe donc $a \in [0\ ;\ 5[$ tel que $f'(a) = 0$ et $b \in]5\ ;\ 15]$ tel que $f'(b) = 0$. En ces deux points distincts le nombre dérivé est nul ce qui signifie que les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ sont horizontales : l'affirmation est fausse.

   Affirmation 4 : La fonction f est convexe sur $\left[5\ ;\ 15\right]$.

   D'après le tableau de variations f'croissante sur $[5\ ;\ 15]$ donc la fonction f est convexe sur cet intervalle : affirmation vraie.