Un homme souhaite creuser un puits dans son jardin. Le premier jour où il creuse, il atteint une profondeur de 1 m. Le sol devenant de plus en plus dur, et l'évacuation de la terre de plus en plus longue, il constate que le deuxième jour, il ne creuse que les quatre cinquièmes de la profondeur creusée la veille, et estime que le travail va continuer à ce rythme : chaque jour, il creusera les quatre cinquièmes de la profondeur creusée la veille. Son voisin a un puits dans lequel l'eau affleure à 4,6 mètres de profondeur. Le but ici est de savoir s'il peut arriver jusqu'à cette profondeur, et si oui, en combien de jours.

1 Pour tout entier $n \geqslant 1$, on appelle u_n la profondeur, exprimée en mètres, creusée le n-ième jour.

a) Donner les valeurs de u_1, u_2 et u_3.

b) Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,8.

c) Exprimer alors u_n en fonction de n.

2 On représente la situation à l'échelle 1/10, soit 10 cm pour représenter 1 m.
Sur une feuille de papier A4, tracer une droite verticale. Placer en haut un point A_0 symbolisant le niveau du sol du jardin puis les points A_1, A_2 et A_3 représentant les profondeurs respectivement atteintes après un, deux et trois jours de travail.
Dans la suite, on appelle P_n la profondeur atteinte après n jours de travail.

3 Lire une valeur approchée de P_3 sur la représentation précédente. Calculer P_4.
Dans ce qui suit, on cherche une méthode pour exprimer simplement la profondeur totale P_n en fonction de n afin de répondre à la question énoncée au début de l'activité.

4 Justifier que $P_n = 1 + 0{,}8 + 0{,}8^2 + \ldots + 0{,}8^{n-1}$.

5 **a)** Tracer un segment AB_1 représentant une unité (on choisit pour cette nouvelle représentation 10 cm pour unité ; dans la suite, toutes les longueurs sont exprimées en unités).
Placer les points B_2, B_3, B_4, B_5 et B_6 du segment $[AB_1]$ tels que $AB_2 = 0{,}8$, $AB_3 = 0{,}8^2$, $AB_4 = 0{,}8^3$, $AB_5 = 0{,}8^4$ et $AB_6 = 0{,}8^5$.

b) Que vaut B_2B_1 ? Justifier que $B_3B_2 = 0{,}2 \times 0{,}8$, puis que $B_4B_3 = 0{,}2 \times 0{,}8^2$. Exprimer sous la même forme B_5B_4 et B_6B_5.

c) En exprimant de deux façons différentes la longueur B_6B_1, démontrer que :
$$1+0{,}8+0{,}8^2+0{,}8^3+0{,}8^4=\frac{1-0{,}8^5}{0{,}2}.$$

6 En poursuivant la construction et le raisonnement de la question 5, on peut établir que :
$$1+0{,}8+0{,}8^2+\ldots\ldots+0{,}8^{n-1}=\frac{1-0{,}8^n}{1-0{,}8}.$$
À partir de ce résultat :
- déterminer la valeur arrondie à 10^{-1} près de la profondeur atteinte après 5 jours, puis 7 jours et enfin 10 jours ;
- déterminer après combien de jours l'eau apparaîtra au fond du puits si elle est à la même profondeur que chez le voisin ;
- faire une conjecture sur la profondeur totale limite qui peut être atteinte.

Dans ce chapitre, on découvre une expression simple de $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$, ce qui permet de déterminer facilement la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.