Bac Blanc

Terminale STI2D

Épreuve de :

MATHÉMATIQUES

??? mars 2020

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 5 pages, numérotées de 1 / 5 à 5 / 5
Dès qu'il vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

L'utilisation de la calculatrice en mode **examen** est autorisée.

L'échange de calculatrice entre les élèves est strictement interdit.
L'usage du dictionnaire n'est pas autorisé.

Exercice	Points
1	4
2	5
3	5
4	5
Total	19

Exercice 1 QCM(/4)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse.

1. On choisit au hasard un nombre réel dans l'intervalle $[10; 50]$. La probabilité que ce nombre appartienne à l'intervalle $[15\,; 20]$ est :

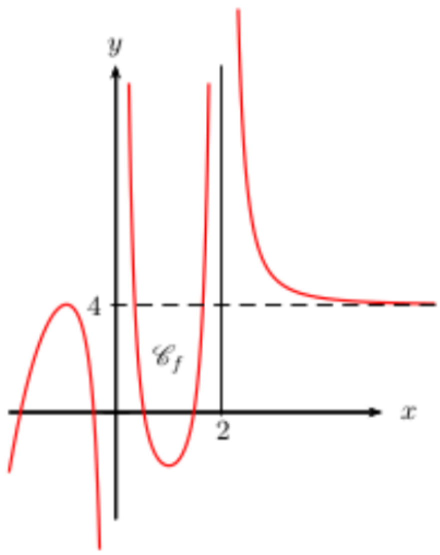
(a) $\frac{5}{50}$ | (b) $\frac{1}{8}$ | (c) $\frac{1}{40}$ | (d) $\frac{1}{5}$

2. La valeur exacte de $\ln(10e^2)$ est :

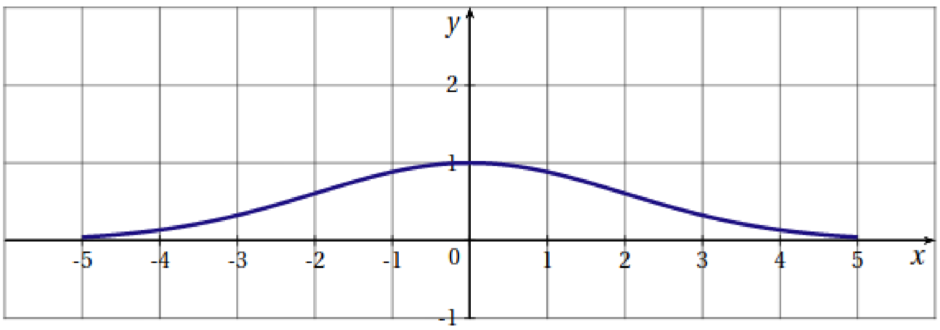
(a) $2\ln(10) + 2$ | (b) $4,302585093$ | (c) $\ln(10) + 2$ | (d) $2\ln(10e)$

3. La fonction f est représenté graphiquement ci-dessus. Quelle est la bonne limite ?

(a) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$
(b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$
(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
(d) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$



4. La courbe ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5; 5]$. On pose $A = \int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$. Un encadrement de A est :



(a) $0 < A < 1$ | (b) $1 < A < 2$ | (c) $3 < A < 4$ | (d) $4 < A < 5$

Exercice 2 Débit internet(/5)

1. Une commune de 2 000 habitants au 1er janvier 2018 voit sa population augmenter de 5 % tous les ans.

   Pour tout entier naturel n, on note h_n le nombre d'habitants de l'année $2018+n$: on a donc $h_0 = 2\,000$.

   La suite (h_n) est une suite géométrique. Exprimer h_n en fonction de n.

La municipalité de cette commune a conclu un marché avec un fournisseur d'accès internet qui engage ce dernier à fournir un débit total de 16 000 Mbit/s au 1er janvier 2018 et à augmenter ce débit de 2,9 % par an.

Pour tout entier naturel n, on note d_n le débit total dont la commune dispose l'année $2018+n$.
On modélise ainsi le débit par la suite (d_n). On a alors $d_n = 16\,000 \times 1,029^n$.

2. On s'intéresse maintenant au débit par habitant en supposant que celui-ci est réparti équitablement et que toute la population bénéficie d'une connexion internet individuelle.

   Pour tout entier naturel n on note u_n le débit par habitant pour l'année $2018+n$ et on admet que $u_n = \dfrac{d_n}{h_n}$.

   (a) Calculer u_0 et u_1.

   (b) Montrer pour tout entier naturel n on a $u_n = 8 \times 0,98^n$.

   (c) En déduire la nature de la suite (u_n) et ses caractéristiques.

   (d) Déterminer la limite de la (u_n).
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

3. Le marché passé avec le fournisseur d'accès internet prévoit également que si le débit passe en dessous de 5 Mbit/s par habitant alors ce dernier doit changer la technologie utilisée pour la réalisation de son réseau.

   (a) On admet que la suite (u_n) est décroissante.
   Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il permette de déterminer dans combien d'années le débit sera considéré comme insuffisant.

```
U ← 8
N ← 0
Tant que  U ...
    U ← ...
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

   (b) En quelle année le fournisseur d'accès sera-t-il dans l'obligation de changer sa technologie ?

En raison des frottements avec l'atmosphère résiduelle terrestre, les satellites en orbite basse perdent progressivement de l'altitude et finissent par se consumer dans les couches les plus denses de l'atmosphère. Cet évènement est appelé rentrée atmosphérique.

Le temps, exprimé en jour, avant la rentrée atmosphérique dépend des caractéristiques du satellite et de l'altitude h, exprimée en kilomètre, de son orbite.

Pour un satellite donné, ce temps est modélisé par une fonction T de la variable h, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

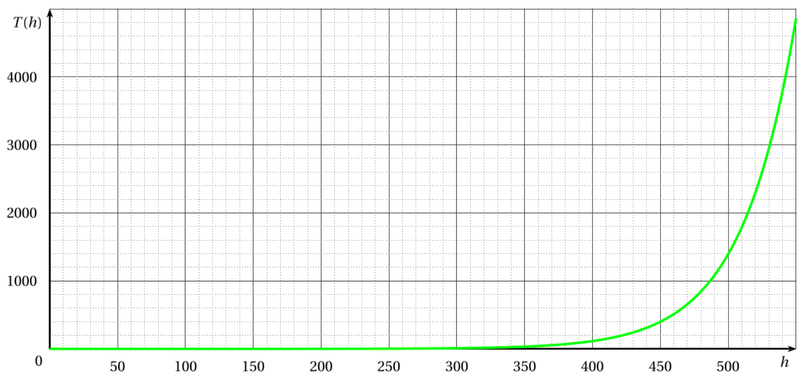
PARTIE A – Étude d'un premier satellite

Dans cette partie, on admet que la fonction T, associée à ce deuxième satellite, est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$T(h) = K \times 0,012\,\mathrm{e}^{\,0,025(h-150)}.$$

Le nombre réel K est appelé coefficient balistique du satellite.

La fonction T associée à ce deuxième satellite est représentée ci-après.



Dans cette partie, les résultats seront donnés avec la précision permise par le graphique.

1. À quelle altitude minimale faut-il mettre en orbite ce deuxième satellite pour que le temps restant avant sa rentrée atmosphérique soit au moins égal à 1 000 jours ?
2. Déterminer une valeur approchée du coefficient balistique K de ce deuxième satellite.

PARTIE B – Étude d'un deuxième satellite : Hubble

Le satellite Hubble a un coefficient balistique K égal à 11.

La fonction T, associée à ce troisième satellite, est donc définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

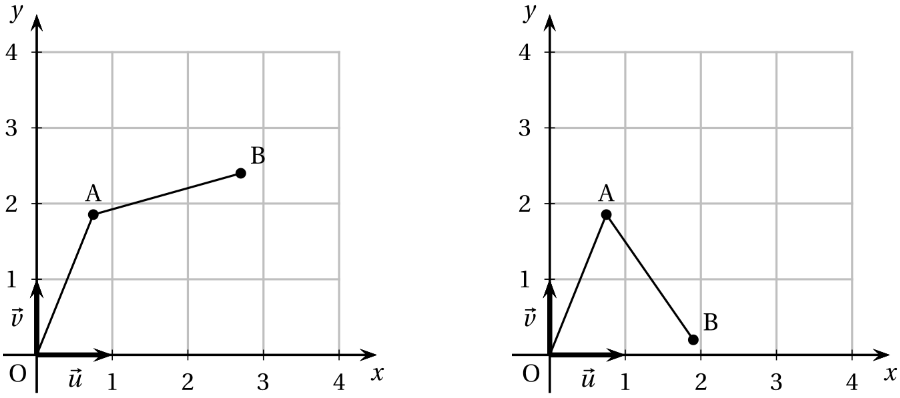
$$T(h) = 0,132\,\mathrm{e}^{\,0,025(h-150)}.$$

1. L'orbite du satellite Hubble est située à l'altitude h de 575 km. Calculer le temps $T(h)$ restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble. Arrondir au jour près.
2. Tracer l'allure de la représentation graphique de T et en déduire la limite de T en $+\infty$.
3. (a) Déterminer $T'(h)$, où T' désigne la fonction dérivée de T.
   (b) En déduire le sens de variations de la fonction T sur $[0\,;\,+\infty[$.
4. On souhaite étudier l'effet d'une augmentation de 10 km de l'altitude h sur le temps restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble.
   (a) Montrer que $T(h+10) = \mathrm{e}^{\,0,25} \times T(h)$.
   (b) En déduire qu'augmenter l'altitude h de 10 km revient à augmenter d'environ 28 % le temps restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble.

Exercice 4 — Bras articulé(/5)

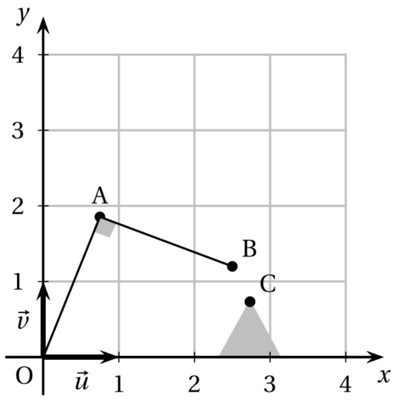
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v})$, le bras articulé d'un robot, fixé au point O, est représenté par deux segments [OA] et [AB], chacun de longueur 2 unités.

Deux exemples de position du bras articulé sont donnés ci-dessous à titre indicatif.



1. (a) Tracer sur la copie un repère orthonormé $(\text{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v})$.
   Placer le point A d'affixe $z_{\text{A}} = 2i$ puis construire l'extrémité B du bras articulé lorsque son affixe z_{B} a pour argument $\dfrac{\pi}{4}$.

   (b) Donner l'affixe du point B sous forme algébrique et sous forme exponentielle.
2. L'extrémité B du bras peut-elle atteindre un objet qui se trouve à une distance de $4,5$ unités du point O ?
3. Pour soulever un objet lourd dont le point d'accroche est le point C (voir figure ci-contre), il faut rigidifier l'articulation en A. On décide alors de bloquer l'angle $\left(\overrightarrow{AO}\,,\ \overrightarrow{AB}\right)$ tel qu'une mesure de cet angle soit constamment égale à $\dfrac{\pi}{2}$ radians.



   (a) Déterminer la longueur OB.

   (b) Le point C a pour affixe $z_{\text{C}} = 2\sqrt{2}\,\text{e}^{i\frac{\pi}{12}}$.
   Justifier que l'extrémité B du bras articulé pourra atteindre le point d'accroche C de l'objet.

   (c) Lorsque le bras articulé saisit l'objet, les points B et C sont confondus.
   Calculer la mesure de l'angle que forme alors le bras [OA] avec l'axe [Ox).