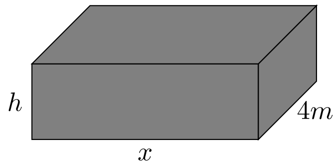
DM 2 – BELSKII Bogdan

Terminale STI2D – 20 novembre 2019

Une part importante de la note sera dédiée à la rédaction, aux explications et à l'utilisation des notations mathématiques.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $20m^3$. La longueur est aussi fixée à $4m$ par le cahier des charges.
On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \frac{5}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 8x + 10 + \frac{40}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{8x^2 + 10x + 40}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{-40 + 8x^2}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 20$, h doit être égale à $\frac{5}{2}$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 20$, h doit être égale à $\frac{5}{3}$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{aligned} V &= h \times x \times 4 \\ 20 &= h \times x \times 4 \\ x &= \frac{20}{h \times 4} = \frac{5}{h} \end{aligned}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{aligned} S(x) &= x \times h \times 2 + x \times 4 \times 2 + h \times 4 \times 2 \\ S(x) &= x \times \frac{5}{x} \times 2 + x \times 4 \times 2 + \frac{5}{x} \times 4 \times 2 \\ S(x) &= 8x + 10 + \frac{40}{x} \end{aligned}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{aligned} S(x) &= 8x + 10 + \frac{40}{x} \\ S(x) &= \frac{8x \times x}{x} + \frac{10 \times x}{x} + \frac{40}{x} \\ S(x) &= \frac{8x^2 + 10x + 40}{x} \end{aligned}$$

5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver

$$u(x) = 8x^2 + 10x + 40 \Rightarrow u'(x) = 10 + 16x$$
$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (10 + 16x) \times x - (8x^2 + 10x + 40) \times 1 \\ &= -40 + 8x^2 \end{aligned}$$

Donc
$$S'(x) = \frac{-40 + 8x^2}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S
   - Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - Signe de $-40 + 8x^2$: c'est un polynôme du 2e degré
   $$\Delta = 1280 > 0$$
   Il y a donc 2 racines
   $$x_1 = -2.23606797749979 \qquad x_2 = 2.23606797749979$$
   Et on sait que $-40 + 8x^2$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
   - Le dénominateur x^2 est toujours positif.
   - Tableau de variations

x	0		-2.23606797749979		10
$-40 + 8x^2$	‖	$-$	0	$+$	
x^2	‖	$+$		$+$	
S'	‖	$-$	0	$+$	
S	‖	↘		↗	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 2.23606797749979$ et $h = 11.18033988749895$.

Exercice 2 climatisation

La climatisation d'un véhicule automobile est un système qui a une double fonction, refroidir ou réchauffer l'habitacle. Ce système fonctionne grâce à une certaine masse de gaz réfrigérant stocké dans un réservoir.

On suppose que, par défaut d'étanchéité, le système perd naturellement 0.114 gramme de gaz chaque jour.

Un automobiliste possède un véhicule pour lequel la masse de gaz dans le réservoir est initialement de 520 grammes.

Partie A

Le constructeur préconise de recharger le réservoir lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 grammes.

Au bout de combien de jours le constructeur préconise-t-il à l'automobiliste de recharger ce réservoir ?

Partie B

Lors d'une visite d'entretien, le garagiste signale à l'automobiliste que le système de climatisation de son véhicule présente une baisse significative de masse de gaz : en plus de la perte naturelle de 0.114 gramme, le système perd $2\,\%$ de sa masse chaque jour.

Le garagiste recharge alors complètement le réservoir.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse de gaz dans le réservoir au bout de n jours après cette visite.

On a donc, $u_0 = 520$ et on admet que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = 0.98u_n - 0.114.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Voici un algorithme qui, lorsque l'on saisit un nombre N non nul de jours écoulés, calcule et affiche la masse de gaz restant dans le système.

```
Variables
    N : un nombre entier naturel
    k : un nombre entier naturel
    u : un nombre réel
Entrée
    Saisir N
Initialisation
    u prend la valeur 660
Traitement
    Pour k allant de 1 à ...
        u prend la valeur ...
    Fin pour
Sortie
    Afficher u
```

   (a) Recopier et compléter la partie relative au **traitement** de cet algorithme.
   (b) Quelle masse de gaz restera-t-il au bout de 20 jours ? Arrondir au gramme près.
3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = u_n + 5.7$.
   (a) Calculer v_0.
   (b) On admet que (v_n) est une suite géométrique de raison 0.98.
   Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 525.7 \times 0.98^n - 5.7$.
   (d) À l'aide de cette expression, vérifier le résultat obtenu à la **question 2.b.**
4. Résoudre $520 \times 0.98^n - 5.7 < 440$ puis interpréter le résultat.

Solution 2

Partie A

- Quantité à perdre avant recharge
$$520 - 440 = 80$$
- À raison d'une perte de 0.114 par jour. Il faudra recharger dans
$$\frac{80}{0.114} = 702 \text{ jours}$$

Partie B

1.

$$\begin{aligned}
u_0 &= 520 \\
u_1 &= 0.98 \times u_0 - 0.114 = 509.486 \\
u_2 &= 0.98 \times u_1 - 0.114 = 499.18228
\end{aligned}$$

2.

Variables

N : un nombre entier naturel

k : un nombre entier naturel

u : un nombre réel

Entrée

Saisir N

Initialisation

u prend la valeur 660

Traitement

Pour k allant de 1 à N

u prend la valeur $0.98 * u - 0.114$

Fin pour

Sortie

Afficher u

3. Avec la calculatrice, on fait une table avec les valeurs de u
4. (a) $v_0 = u_0 + 5.7 = 520 + 5.7 = 525.7$

   (b) $v_n = 525.7 \times 0.98^n$

   (c) Comme $v_n = u_n + 5.7$ alors $u_n = v_n - 5.7$ et donc

$$u_n = 525.7 \times 0.98^n - 5.7$$

   (d) $u_{20} = 525.7 \times 0.98^{20} - 5.7 = 345$
5.

$$\begin{array}{rcl}
520 \times 0.98^n - 5.7 & < & 440 \\
520 \times 0.98^n & < & 440 + 5.7 \\
0.98^n & < & \dfrac{440 + 5.7}{520} \\
ln(0.98^n) & < & ln\left(\dfrac{440 + 5.7}{520}\right) \\
n \times ln(0.98) & < & ln\left(\dfrac{440 + 5.7}{520}\right) \\
n & > & \dfrac{ln\left(\frac{440+5.7}{520}\right)}{ln 0.98}
\end{array}$$

Il ne faut pas oublier d'inverser le sens de l'inégalité à la dernière étape car $ln(0.98)$ est négatif.
Le nombre trouvé est le nombre de jours qui vont passer avant de devoir recharger la climatisation.

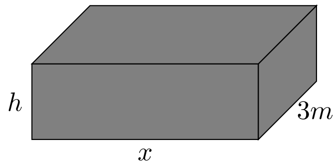
DM 2 – BERGER Dorian

Terminale STI2D – 20 novembre 2019

Une part importante de la note sera dédiée à la rédaction, aux explications et à l'utilisation des notations mathématiques.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $9m^3$. La longueur est aussi fixée à $3m$ par le cahier des charges.
On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \dfrac{3}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 6x + 6 + \frac{18}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{6x^2 + 6x + 18}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{-18 + 6x^2}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 9$, h doit être égale à $\frac{3}{2}$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 9$, h doit être égale à $\frac{3}{3}$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{aligned} V &= h \times x \times 3 \\ 9 &= h \times x \times 3 \\ x &= \frac{9}{h \times 3} = \frac{3}{h} \end{aligned}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{aligned} S(x) &= x \times h \times 2 + x \times 3 \times 2 + h \times 3 \times 2 \\ S(x) &= x \times \frac{3}{x} \times 2 + x \times 3 \times 2 + \frac{3}{x} \times 3 \times 2 \\ S(x) &= 6x + 6 + \frac{18}{x} \end{aligned}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{aligned} S(x) &= 6x + 6 + \frac{18}{x} \\ S(x) &= \frac{6x \times x}{x} + \frac{6 \times x}{x} + \frac{18}{x} \\ S(x) &= \frac{6x^2 + 6x + 18}{x} \end{aligned}$$

5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver

$$u(x) = 6x^2 + 6x + 18 \Rightarrow u'(x) = 6 + 12x$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

   Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (6 + 12x) \times x - (6x^2 + 6x + 18) \times 1 \\ &= -18 + 6x^2 \end{aligned}$$

   Donc

$$S'(x) = \frac{-18 + 6x^2}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S
   - Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - Signe de $-18 + 6x^2$: c'est un polynôme du 2e degré

$$\Delta = 432 > 0$$

     Il y a donc 2 racines

$$x_1 = -1.7320508075688774 \qquad x_2 = 1.7320508075688774$$

     Et on sait que $-18 + 6x^2$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
   - Le dénominateur x^2 est toujours positif.
   - Tableau de variations

x	0		-1.7320508075688774		10
$-18 + 6x^2$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
x^2	$\Vert$	$+$		$+$	
S'	$\Vert$	$-$	0	$+$	
S	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 1.7320508075688774$ et $h = 5.1961524227066322$.

Exercice 2 climatisation

La climatisation d'un véhicule automobile est un système qui a une double fonction, refroidir ou réchauffer l'habitacle. Ce système fonctionne grâce à une certaine masse de gaz réfrigérant stocké dans un réservoir.

On suppose que, par défaut d'étanchéité, le système perd naturellement 0.096 gramme de gaz chaque jour.

Un automobiliste possède un véhicule pour lequel la masse de gaz dans le réservoir est initialement de 570 grammes.

Partie A

Le constructeur préconise de recharger le réservoir lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 grammes.

Au bout de combien de jours le constructeur préconise-t-il à l'automobiliste de recharger ce réservoir ?

Partie B

Lors d'une visite d'entretien, le garagiste signale à l'automobiliste que le système de climatisation de son véhicule présente une baisse significative de masse de gaz : en plus de la perte naturelle de 0.096 gramme, le système perd $3\,\%$ de sa masse chaque jour.

Le garagiste recharge alors complètement le réservoir.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse de gaz dans le réservoir au bout de n jours après cette visite.

On a donc, $u_0 = 570$ et on admet que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = 0.97u_n - 0.096.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Voici un algorithme qui, lorsque l'on saisit un nombre N non nul de jours écoulés, calcule et affiche la masse de gaz restant dans le système.

```
Variables
    N : un nombre entier naturel
    k : un nombre entier naturel
    u : un nombre réel
Entrée
    Saisir N
Initialisation
    u prend la valeur 660
Traitement
    Pour k allant de 1 à ...
        u prend la valeur ...
    Fin pour
Sortie
    Afficher u
```

   (a) Recopier et compléter la partie relative au **traitement** de cet algorithme.

   (b) Quelle masse de gaz restera-t-il au bout de 20 jours ? Arrondir au gramme près.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = u_n + 3.2$.

   (a) Calculer v_0.

   (b) On admet que (v_n) est une suite géométrique de raison 0.97.
   Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 573.2 \times 0.97^n - 3.2$.

   (d) À l'aide de cette expression, vérifier le résultat obtenu à la **question 2.b.**

4. Résoudre $570 \times 0.97^n - 3.2 < 440$ puis interpréter le résultat.

Solution 2

Partie A

- Quantité à perdre avant recharge
$$570 - 440 = 130$$
- À raison d'une perte de 0.096 par jour. Il faudra recharger dans
$$\frac{130}{0.096} = 1354 \text{ jours}$$

Partie B

1.

$$\begin{array}{rcl} u_0 & = & 570 \\ u_1 & = & 0.97 \times u_0 - 0.096 = 552.804 \\ u_2 & = & 0.97 \times u_1 - 0.096 = 536.12388 \end{array}$$

2.

Variables

N : un nombre entier naturel

k : un nombre entier naturel

u : un nombre réel

Entrée

Saisir N

Initialisation

u prend la valeur 660

Traitement

Pour k allant de 1 à N

u prend la valeur $0.97 * u - 0.096$

Fin pour

Sortie

Afficher u

3. Avec la calculatrice, on fait une table avec les valeurs de u
4. (a) $v_0 = u_0 + 3.2 = 570 + 3.2 = 573.2$

   (b) $v_n = 573.2 \times 0.97^n$

   (c) Comme $v_n = u_n + 3.2$ alors $u_n = v_n - 3.2$ et donc

   $$u_n = 573.2 \times 0.97^n - 3.2$$

   (d) $u_{20} = 573.2 \times 0.97^{20} - 3.2 = 309$
5.

$$\begin{array}{rcl} 570 \times 0.97^n - 3.2 & < & 440 \\ 570 \times 0.97^n & < & 440 + 3.2 \\ 0.97^n & < & \dfrac{440 + 3.2}{570} \\ ln(0.97^n) & < & ln\left(\dfrac{440 + 3.2}{570}\right) \\ n \times ln(0.97) & < & ln\left(\dfrac{440 + 3.2}{570}\right) \\ n & > & \dfrac{ln\left(\frac{440+3.2}{570}\right)}{ln 0.97} \end{array}$$

Il ne faut pas oublier d'inverser le sens de l'inégalité à la dernière étape car $ln(0.97)$ est négatif.
Le nombre trouvé est le nombre de jours qui vont passer avant de devoir recharger la climatisation.

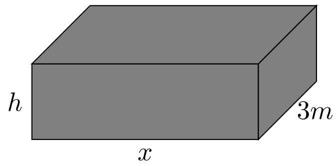
DM 2 – DESLOT Clement

Terminale STI2D – 20 novembre 2019

Une part importante de la note sera dédiée à la rédaction, aux explications et à l'utilisation des notations mathématiques.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $21m^3$. La longueur est aussi fixée à $3m$ par le cahier des charges.
On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \frac{7}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 6x + 14 + \frac{42}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{6x^2 + 14x + 42}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{-42 + 6x^2}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 21$, h doit être égale à $\frac{7}{2}$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 21$, h doit être égale à $\frac{7}{3}$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{aligned} V &= h \times x \times 3 \\ 21 &= h \times x \times 3 \\ x &= \frac{21}{h \times 3} = \frac{7}{h} \end{aligned}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{aligned} S(x) &= x \times h \times 2 + x \times 3 \times 2 + h \times 3 \times 2 \\ S(x) &= x \times \frac{7}{x} \times 2 + x \times 3 \times 2 + \frac{7}{x} \times 3 \times 2 \\ S(x) &= 6x + 14 + \frac{42}{x} \end{aligned}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{aligned} S(x) &= 6x + 14 + \frac{42}{x} \\ S(x) &= \frac{6x \times x}{x} + \frac{14 \times x}{x} + \frac{42}{x} \\ S(x) &= \frac{6x^2 + 14x + 42}{x} \end{aligned}$$

5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver

$$u(x) = 6x^2 + 14x + 42 \Rightarrow u'(x) = 14 + 12x$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (14 + 12x) \times x - (6x^2 + 14x + 42) \times 1 \\ &= -42 + 6x^2 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{-42 + 6x^2}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S

- Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Signe de $-42 + 6x^2$: c'est un polynôme du 2e degré

$$\Delta = 1008 > 0$$

Il y a donc 2 racines

$$x_1 = -2.6457513110645907 \qquad x_2 = 2.6457513110645907$$

Et on sait que $-42 + 6x^2$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
- Le dénominateur x^2 est toujours positif.
- Tableau de variations

x	0		-2.6457513110645907		10
$-42 + 6x^2$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$		$+$	
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$		$\nearrow$	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 2.6457513110645907$ et $h = 18.52025917745213 49$.

Exercice 2 climatisation

La climatisation d'un véhicule automobile est un système qui a une double fonction, refroidir ou réchauffer l'habitacle. Ce système fonctionne grâce à une certaine masse de gaz réfrigérant stocké dans un réservoir.

On suppose que, par défaut d'étanchéité, le système perd naturellement 0.068 gramme de gaz chaque jour.

Un automobiliste possède un véhicule pour lequel la masse de gaz dans le réservoir est initialement de 660 grammes.

Partie A

Le constructeur préconise de recharger le réservoir lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 grammes.

Au bout de combien de jours le constructeur préconise-t-il à l'automobiliste de recharger ce réservoir ?

Partie B

Lors d'une visite d'entretien, le garagiste signale à l'automobiliste que le système de climatisation de son véhicule présente une baisse significative de masse de gaz : en plus de la perte naturelle de 0.068 gramme, le système perd $4\,\%$ de sa masse chaque jour.

Le garagiste recharge alors complètement le réservoir.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse de gaz dans le réservoir au bout de n jours après cette visite.

On a donc, $u_0 = 660$ et on admet que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = 0.96u_n - 0.068.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Voici un algorithme qui, lorsque l'on saisit un nombre N non nul de jours écoulés, calcule et affiche la masse de gaz restant dans le système.

```
Variables
    N : un nombre entier naturel
    k : un nombre entier naturel
    u : un nombre réel
Entrée
    Saisir N
Initialisation
    u prend la valeur 660
Traitement
    Pour k allant de 1 à ...
        u prend la valeur ...
    Fin pour
Sortie
    Afficher u
```

   (a) Recopier et compléter la partie relative au **traitement** de cet algorithme.

   (b) Quelle masse de gaz restera-t-il au bout de 20 jours ? Arrondir au gramme près.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = u_n + 1.7$.

   (a) Calculer v_0.

   (b) On admet que (v_n) est une suite géométrique de raison 0.96.
   Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 661.7 \times 0.96^n - 1.7$.

   (d) À l'aide de cette expression, vérifier le résultat obtenu à la **question 2.b.**

4. Résoudre $660 \times 0.96^n - 1.7 < 440$ puis interpréter le résultat.

Solution 2

Partie A

- Quantité à perdre avant recharge
$$660 - 440 = 220$$
- À raison d'une perte de 0.068 par jour. Il faudra recharger dans
$$\frac{220}{0.068} = 3235 \text{ jours}$$

Partie B

1.

$$\begin{aligned} u_0 &= 660 \\ u_1 &= 0.96 \times u_0 - 0.068 = 633.532 \\ u_2 &= 0.96 \times u_1 - 0.068 = 608.12272 \end{aligned}$$

2.

Variables

N : un nombre entier naturel

k : un nombre entier naturel

u : un nombre réel

Entrée

Saisir N

Initialisation

u prend la valeur 660

Traitement

Pour k allant de 1 à N

u prend la valeur $0.96 * u - 0.068$

Fin pour

Sortie

Afficher u

3. Avec la calculatrice, on fait une table avec les valeurs de u
4. (a) $v_0 = u_0 + 1.7 = 660 + 1.7 = 661.7$

   (b) $v_n = 661.7 \times 0.96^n$

   (c) Comme $v_n = u_n + 1.7$ alors $u_n = v_n - 1.7$ et donc

   $$u_n = 661.7 \times 0.96^n - 1.7$$

   (d) $u_{20} = 661.7 \times 0.96^{20} - 1.7 = 291$
5.

$$\begin{aligned} 660 \times 0.96^n - 1.7 &< 440 \\ 660 \times 0.96^n &< 440 + 1.7 \\ 0.96^n &< \frac{440 + 1.7}{660} \\ ln(0.96^n) &< ln\left(\frac{440 + 1.7}{660}\right) \\ n \times ln(0.96) &< ln\left(\frac{440 + 1.7}{660}\right) \\ n &> \frac{ln\left(\frac{440+1.7}{660}\right)}{ln 0.96} \end{aligned}$$

Il ne faut pas oublier d'inverser le sens de l'inégalité à la dernière étape car $ln(0.96)$ est négatif.
Le nombre trouvé est le nombre de jours qui vont passer avant de devoir recharger la climatisation.

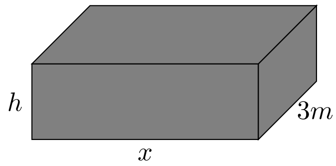
DM 2 – DESSEIGNE Mickael

Terminale STI2D – 20 novembre 2019

Une part importante de la note sera dédiée à la rédaction, aux explications et à l'utilisation des notations mathématiques.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $21m^3$. La longueur est aussi fixée à $3m$ par le cahier des charges.
On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \frac{7}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 6x + 14 + \frac{42}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{6x^2 + 14x + 42}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{-42 + 6x^2}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 21$, h doit être égale à $\frac{7}{2}$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 21$, h doit être égale à $\frac{7}{3}$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{array}{rcl} V & = & h \times x \times 3 \\ 21 & = & h \times x \times 3 \\ x & = & \dfrac{21}{h \times 3} = \dfrac{7}{h} \end{array}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & x \times h \times 2 + x \times 3 \times 2 + h \times 3 \times 2 \\ S(x) & = & x \times \dfrac{7}{x} \times 2 + x \times 3 \times 2 + \dfrac{7}{x} \times 3 \times 2 \\ S(x) & = & 6x + 14 + \dfrac{42}{x} \end{array}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & 6x + 14 + \dfrac{42}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{6x \times x}{x} + \dfrac{14 \times x}{x} + \dfrac{42}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{6x^2 + 14x + 42}{x} \end{array}$$

5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver

$$u(x) = 6x^2 + 14x + 42 \Rightarrow u'(x) = 14 + 12x$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

   Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (14 + 12x) \times x - (6x^2 + 14x + 42) \times 1 \\ &= -42 + 6x^2 \end{aligned}$$

   Donc

$$S'(x) = \frac{-42 + 6x^2}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S
   - Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - Signe de $-42 + 6x^2$: c'est un polynôme du 2e degré

$$\Delta = 1008 > 0$$

     Il y a donc 2 racines

$$x_1 = -2.6457513110645907 \qquad x_2 = 2.6457513110645907$$

     Et on sait que $-42 + 6x^2$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
   - Le dénominateur x^2 est toujours positif.
   - Tableau de variations

x	0		-2.6457513110645907		10
$-42 + 6x^2$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
x^2	$\Vert$	$+$		$+$	
S'	$\Vert$	$-$	0	$+$	
S	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 2.6457513110645907$ et $h = 18.52025917745213349$.

Exercice 2 climatisation

La climatisation d'un véhicule automobile est un système qui a une double fonction, refroidir ou réchauffer l'habitacle. Ce système fonctionne grâce à une certaine masse de gaz réfrigérant stocké dans un réservoir.

On suppose que, par défaut d'étanchéité, le système perd naturellement 0.342 gramme de gaz chaque jour.

Un automobiliste possède un véhicule pour lequel la masse de gaz dans le réservoir est initialement de 600 grammes.

Partie A

Le constructeur préconise de recharger le réservoir lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 grammes.

Au bout de combien de jours le constructeur préconise-t-il à l'automobiliste de recharger ce réservoir ?

Partie B

Lors d'une visite d'entretien, le garagiste signale à l'automobiliste que le système de climatisation de son véhicule présente une baisse significative de masse de gaz : en plus de la perte naturelle de 0.342 gramme, le système perd $9\,\%$ de sa masse chaque jour.

Le garagiste recharge alors complètement le réservoir.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse de gaz dans le réservoir au bout de n jours après cette visite.

On a donc, $u_0 = 600$ et on admet que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = 0.91u_n - 0.342.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Voici un algorithme qui, lorsque l'on saisit un nombre N non nul de jours écoulés, calcule et affiche la masse de gaz restant dans le système.

Variables
N : un nombre entier naturel
k : un nombre entier naturel
u : un nombre réel
Entrée
Saisir N
Initialisation
u prend la valeur 660
Traitement
Pour k allant de 1 à ...
u prend la valeur ...
Fin pour
Sortie
Afficher u

   (a) Recopier et compléter la partie relative au **traitement** de cet algorithme.

   (b) Quelle masse de gaz restera-t-il au bout de 20 jours ? Arrondir au gramme près.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = u_n + 3.8$.

   (a) Calculer v_0.

   (b) On admet que (v_n) est une suite géométrique de raison 0.91.
   Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 603.8 \times 0.91^n - 3.8$.

   (d) À l'aide de cette expression, vérifier le résultat obtenu à la **question 2.b.**

4. Résoudre $600 \times 0.91^n - 3.8 < 440$ puis interpréter le résultat.

Solution 2

Partie A

- Quantité à perdre avant recharge
$$600 - 440 = 160$$
- À raison d'une perte de 0.342 par jour. Il faudra recharger dans
$$\frac{160}{0.342} = 468 \text{ jours}$$

Partie B

1.

$$\begin{aligned}u_0 &= 600\\ u_1 &= 0.91 \times u_0 - 0.342 = 545.658\\ u_2 &= 0.91 \times u_1 - 0.342 = 496.20678\end{aligned}$$

2.

Variables

N : un nombre entier naturel

k : un nombre entier naturel

u : un nombre réel

Entrée

Saisir N

Initialisation

u prend la valeur 660

Traitement

Pour k allant de 1 à N

u prend la valeur $0.91 * u - 0.342$

Fin pour

Sortie

Afficher u

3. Avec la calculatrice, on fait une table avec les valeurs de u
4. (a) $v_0 = u_0 + 3.8 = 600 + 3.8 = 603.8$

   (b) $v_n = 603.8 \times 0.91^n$

   (c) Comme $v_n = u_n + 3.8$ alors $u_n = v_n - 3.8$ et donc

   $$u_n = 603.8 \times 0.91^n - 3.8$$

   (d) $u_{20} = 603.8 \times 0.91^{20} - 3.8 = 88$
5.

$$\begin{aligned}600 \times 0.91^n - 3.8 &< 440\\ 600 \times 0.91^n &< 440 + 3.8\\ 0.91^n &< \frac{440+3.8}{600}\\ ln(0.91^n) &< ln\left(\frac{440+3.8}{600}\right)\\ n \times ln(0.91) &< ln\left(\frac{440+3.8}{600}\right)\\ n &> \frac{ln\left(\frac{440+3.8}{600}\right)}{ln 0.91}\end{aligned}$$

Il ne faut pas oublier d'inverser le sens de l'inégalité à la dernière étape car $ln(0.91)$ est négatif.
Le nombre trouvé est le nombre de jours qui vont passer avant de devoir recharger la climatisation.

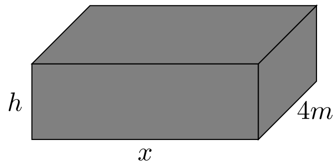
DM 2 – DUBOIS Yanis

Terminale STI2D – 20 novembre 2019

Une part importante de la note sera dédiée à la rédaction, aux explications et à l'utilisation des notations mathématiques.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $12m^3$. La longueur est aussi fixée à $4m$ par le cahier des charges.
On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \frac{3}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 8x + 6 + \frac{24}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{8x^2 + 6x + 24}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{-24 + 8x^2}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 12$, h doit être égale à $\frac{3}{2}$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 12$, h doit être égale à $\frac{3}{3}$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{aligned} V &= h \times x \times 4 \\ 12 &= h \times x \times 4 \\ x &= \frac{12}{h \times 4} = \frac{3}{h} \end{aligned}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{aligned} S(x) &= x \times h \times 2 + x \times 4 \times 2 + h \times 4 \times 2 \\ S(x) &= x \times \frac{3}{x} \times 2 + x \times 4 \times 2 + \frac{3}{x} \times 4 \times 2 \\ S(x) &= 8x + 6 + \frac{24}{x} \end{aligned}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{aligned} S(x) &= 8x + 6 + \frac{24}{x} \\ S(x) &= \frac{8x \times x}{x} + \frac{6 \times x}{x} + \frac{24}{x} \\ S(x) &= \frac{8x^2 + 6x + 24}{x} \end{aligned}$$

5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver

$$u(x) = 8x^2 + 6x + 24 \Rightarrow u'(x) = 6 + 16x$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

   Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (6 + 16x) \times x - (8x^2 + 6x + 24) \times 1 \\ &= -24 + 8x^2 \end{aligned}$$

   Donc

$$S'(x) = \frac{-24 + 8x^2}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S
   - Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - Signe de $-24 + 8x^2$: c'est un polynôme du 2e degré

$$\Delta = 768 > 0$$

     Il y a donc 2 racines

$$x_1 = -1.7320508075688772 \qquad x_2 = 1.7320508075688772$$

     Et on sait que $-24 + 8x^2$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
   - Le dénominateur x^2 est toujours positif.
   - Tableau de variations

x	0		-1.7320508075688772		10
$-24 + 8x^2$	‖	$-$	0	$+$	
x^2	‖	$+$		$+$	
S'	‖	$-$	0	$+$	
S	‖	$\searrow$		$\nearrow$	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 1.7320508075688772$ et $h = 5.1961524227066316$.

Exercice 2 — climatisation

La climatisation d'un véhicule automobile est un système qui a une double fonction, refroidir ou réchauffer l'habitacle. Ce système fonctionne grâce à une certaine masse de gaz réfrigérant stocké dans un réservoir.

On suppose que, par défaut d'étanchéité, le système perd naturellement 0.156 gramme de gaz chaque jour.

Un automobiliste possède un véhicule pour lequel la masse de gaz dans le réservoir est initialement de 680 grammes.

Partie A

Le constructeur préconise de recharger le réservoir lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 grammes.

Au bout de combien de jours le constructeur préconise-t-il à l'automobiliste de recharger ce réservoir ?

Partie B

Lors d'une visite d'entretien, le garagiste signale à l'automobiliste que le système de climatisation de son véhicule présente une baisse significative de masse de gaz : en plus de la perte naturelle de 0.156 gramme, le système perd $4\,\%$ de sa masse chaque jour.

Le garagiste recharge alors complètement le réservoir.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse de gaz dans le réservoir au bout de n jours après cette visite.

On a donc, $u_0 = 680$ et on admet que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = 0.96u_n - 0.156.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Voici un algorithme qui, lorsque l'on saisit un nombre N non nul de jours écoulés, calcule et affiche la masse de gaz restant dans le système.

```
Variables
    N : un nombre entier naturel
    k : un nombre entier naturel
    u : un nombre réel
Entrée
    Saisir N
Initialisation
    u prend la valeur 660
Traitement
    Pour k allant de 1 à ...
        u prend la valeur ...
    Fin pour
Sortie
    Afficher u
```

   (a) Recopier et compléter la partie relative au **traitement** de cet algorithme.

   (b) Quelle masse de gaz restera-t-il au bout de 20 jours ? Arrondir au gramme près.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = u_n + 3.9$.

   (a) Calculer v_0.

   (b) On admet que (v_n) est une suite géométrique de raison 0.96.
   Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 683.9 \times 0.96^n - 3.9$.

   (d) À l'aide de cette expression, vérifier le résultat obtenu à la **question 2.b.**

4. Résoudre $680 \times 0.96^n - 3.9 < 440$ puis interpréter le résultat.

Solution 2

Partie A

- Quantité à perdre avant recharge
$$680 - 440 = 240$$
- À raison d'une perte de 0.156 par jour. Il faudra recharger dans
$$\frac{240}{0.156} = 1538 \text{ jours}$$

Partie B

1.

$$\begin{aligned} u_0 &= 680 \\ u_1 &= 0.96 \times u_0 - 0.156 = 652.644 \\ u_2 &= 0.96 \times u_1 - 0.156 = 626.38224 \end{aligned}$$

2.

Variables

N : un nombre entier naturel

k : un nombre entier naturel

u : un nombre réel

Entrée

Saisir N

Initialisation

u prend la valeur 660

Traitement

Pour k allant de 1 à N

u prend la valeur $0.96 * u - 0.156$

Fin pour

Sortie

Afficher u

3. Avec la calculatrice, on fait une table avec les valeurs de u
4. (a) $v_0 = u_0 + 3.9 = 680 + 3.9 = 683.9$

   (b) $v_n = 683.9 \times 0.96^n$

   (c) Comme $v_n = u_n + 3.9$ alors $u_n = v_n - 3.9$ et donc

   $$u_n = 683.9 \times 0.96^n - 3.9$$

   (d) $u_{20} = 683.9 \times 0.96^{20} - 3.9 = 298$
5.

$$\begin{aligned} 680 \times 0.96^n - 3.9 &< 440 \\ 680 \times 0.96^n &< 440 + 3.9 \\ 0.96^n &< \frac{440 + 3.9}{680} \\ ln(0.96^n) &< ln\left(\frac{440 + 3.9}{680}\right) \\ n \times ln(0.96) &< ln\left(\frac{440 + 3.9}{680}\right) \\ n &> \frac{ln\left(\frac{440+3.9}{680}\right)}{ln 0.96} \end{aligned}$$

Il ne faut pas oublier d'inverser le sens de l'inégalité à la dernière étape car $ln(0.96)$ est négatif.
Le nombre trouvé est le nombre de jours qui vont passer avant de devoir recharger la climatisation.

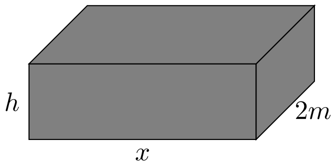
DM 2 – DUBUISSON Léo

Terminale STI2D – 20 novembre 2019

Une part importante de la note sera dédiée à la rédaction, aux explications et à l'utilisation des notations mathématiques.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $6m^3$. La longueur est aussi fixée à $2m$ par le cahier des charges.
On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \frac{3}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 4x + 6 + \frac{12}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{4x^2 + 6x + 12}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{-12 + 4x^2}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 6$, h doit être égale à $\frac{3}{2}$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 6$, h doit être égale à $\frac{3}{3}$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{array}{rcl} V & = & h \times x \times 2 \\ 6 & = & h \times x \times 2 \\ x & = & \dfrac{6}{h \times 2} = \dfrac{3}{h} \end{array}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & x \times h \times 2 + x \times 2 \times 2 + h \times 2 \times 2 \\ S(x) & = & x \times \dfrac{3}{x} \times 2 + x \times 2 \times 2 + \dfrac{3}{x} \times 2 \times 2 \\ S(x) & = & 4x + 6 + \dfrac{12}{x} \end{array}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & 4x + 6 + \dfrac{12}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{4x \times x}{x} + \dfrac{6 \times x}{x} + \dfrac{12}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{4x^2 + 6x + 12}{x} \end{array}$$

5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver

$$u(x) = 4x^2 + 6x + 12 \Rightarrow u'(x) = 6 + 8x$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{array}{rcl} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) & = & (6 + 8x) \times x - (4x^2 + 6x + 12) \times 1 \\ & = & -12 + 4x^2 \end{array}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{-12 + 4x^2}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S

- Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Signe de $-12 + 4x^2$: c'est un polynôme du 2e degré

$$\Delta = 192 > 0$$

Il y a donc 2 racines

$$x_1 = -1.7320508075688772 \qquad x_2 = 1.7320508075688772$$

Et on sait que $-12 + 4x^2$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
- Le dénominateur x^2 est toujours positif.
- Tableau de variations

x	0		-1.7320508075688772		10
$-12 + 4x^2$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
x^2	$\Vert$	$+$		$+$	
S'	$\Vert$	$-$	0	$+$	
S	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 1.7320508075688772$ et $h = 5.1961524227066316$.

Exercice 2 climatisation

La climatisation d'un véhicule automobile est un système qui a une double fonction, refroidir ou réchauffer l'habitacle. Ce système fonctionne grâce à une certaine masse de gaz réfrigérant stocké dans un réservoir.

On suppose que, par défaut d'étanchéité, le système perd naturellement 0.322 gramme de gaz chaque jour.

Un automobiliste possède un véhicule pour lequel la masse de gaz dans le réservoir est initialement de 570 grammes.

Partie A

Le constructeur préconise de recharger le réservoir lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 grammes.

Au bout de combien de jours le constructeur préconise-t-il à l'automobiliste de recharger ce réservoir ?

Partie B

Lors d'une visite d'entretien, le garagiste signale à l'automobiliste que le système de climatisation de son véhicule présente une baisse significative de masse de gaz : en plus de la perte naturelle de 0.322 gramme, le système perd $7\,\%$ de sa masse chaque jour.

Le garagiste recharge alors complètement le réservoir.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse de gaz dans le réservoir au bout de n jours après cette visite.

On a donc, $u_0 = 570$ et on admet que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = 0.93u_n - 0.322.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Voici un algorithme qui, lorsque l'on saisit un nombre N non nul de jours écoulés, calcule et affiche la masse de gaz restant dans le système.

```
Variables
    N : un nombre entier naturel
    k : un nombre entier naturel
    u : un nombre réel
Entrée
    Saisir N
Initialisation
    u prend la valeur 660
Traitement
    Pour k allant de 1 à ...
        u prend la valeur ...
    Fin pour
Sortie
    Afficher u
```

   (a) Recopier et compléter la partie relative au **traitement** de cet algorithme.

   (b) Quelle masse de gaz restera-t-il au bout de 20 jours ? Arrondir au gramme près.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = u_n + 4.6$.

   (a) Calculer v_0.

   (b) On admet que (v_n) est une suite géométrique de raison 0.93.
   Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 574.6 \times 0.93^n - 4.6$.

   (d) À l'aide de cette expression, vérifier le résultat obtenu à la **question 2.b.**

4. Résoudre $570 \times 0.93^n - 4.6 < 440$ puis interpréter le résultat.

Solution 2

Partie A

- Quantité à perdre avant recharge
$$570 - 440 = 130$$
- À raison d'une perte de 0.322 par jour. Il faudra recharger dans
$$\frac{130}{0.322} = 404 \text{ jours}$$

Partie B

1.

$$\begin{aligned} u_0 &= 570 \\ u_1 &= 0.93 \times u_0 - 0.322 = 529.778 \\ u_2 &= 0.93 \times u_1 - 0.322 = 492.37154 \end{aligned}$$

2.

Variables

N : un nombre entier naturel

k : un nombre entier naturel

u : un nombre réel

Entrée

Saisir N

Initialisation

u prend la valeur 660

Traitement

Pour k allant de 1 à N

u prend la valeur $0.93 * u - 0.322$

Fin pour

Sortie

Afficher u

3. Avec la calculatrice, on fait une table avec les valeurs de u
4. (a) $v_0 = u_0 + 4.6 = 570 + 4.6 = 574.6$

   (b) $v_n = 574.6 \times 0.93^n$

   (c) Comme $v_n = u_n + 4.6$ alors $u_n = v_n - 4.6$ et donc

$$u_n = 574.6 \times 0.93^n - 4.6$$

   (d) $u_{20} = 574.6 \times 0.93^{20} - 4.6 = 130$

5.

$$\begin{aligned} 570 \times 0.93^n - 4.6 &< 440 \\ 570 \times 0.93^n &< 440 + 4.6 \\ 0.93^n &< \frac{440 + 4.6}{570} \\ ln(0.93^n) &< ln\left(\frac{440 + 4.6}{570}\right) \\ n \times ln(0.93) &< ln\left(\frac{440 + 4.6}{570}\right) \\ n &> \frac{ln\left(\frac{440+4.6}{570}\right)}{ln 0.93} \end{aligned}$$

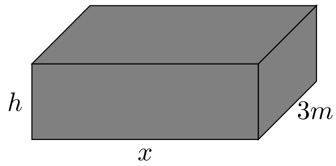
Il ne faut pas oublier d'inverser le sens de l'inégalité à la dernière étape car $ln(0.93)$ est négatif.
Le nombre trouvé est le nombre de jours qui vont passer avant de devoir recharger la climatisation.

DM 2 – GAULET Kelian

Terminale STI2D – 20 novembre 2019

Une part importante de la note sera dédiée à la rédaction, aux explications et à l'utilisation des notations mathématiques.

Exercice 1 — Optimisation de matière



On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $15m^3$. La longueur est aussi fixée à $3m$ par le cahier des charges.
On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.

1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \dfrac{5}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 6x + 10 + \frac{30}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{6x^2 + 10x + 30}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{-30 + 6x^2}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 15$, h doit être égale à $\frac{5}{2}$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 15$, h doit être égale à $\frac{5}{3}$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{array}{rcl} V & = & h \times x \times 3 \\ 15 & = & h \times x \times 3 \\ x & = & \dfrac{15}{h \times 3} = \dfrac{5}{h} \end{array}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & x \times h \times 2 + x \times 3 \times 2 + h \times 3 \times 2 \\ S(x) & = & x \times \dfrac{5}{x} \times 2 + x \times 3 \times 2 + \dfrac{5}{x} \times 3 \times 2 \\ S(x) & = & 6x + 10 + \dfrac{30}{x} \end{array}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & 6x + 10 + \dfrac{30}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{6x \times x}{x} + \dfrac{10 \times x}{x} + \dfrac{30}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{6x^2 + 10x + 30}{x} \end{array}$$

5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver

$$u(x) = 6x^2 + 10x + 30 \Rightarrow u'(x) = 10 + 12x$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (10 + 12x) \times x - (6x^2 + 10x + 30) \times 1 \\ &= -30 + 6x^2 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{-30 + 6x^2}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S
   - Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - Signe de $-30 + 6x^2$: c'est un polynôme du 2e degré

     $$\Delta = 720 > 0$$

     Il y a donc 2 racines

     $$x_1 = -2.23606797749979 \qquad x_2 = 2.23606797749979$$

     Et on sait que $-30 + 6x^2$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
   - Le dénominateur x^2 est toujours positif.
   - Tableau de variations

x	0		-2.23606797749979		10
$-30 + 6x^2$	‖	$-$	0	$+$	
x^2	‖	$+$		$+$	
S'	‖	$-$	0	$+$	
S	‖	$\searrow$		$\nearrow$	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 2.23606797749979$ et $h = 11.18033988749895$.

Exercice 2 — climatisation

La climatisation d'un véhicule automobile est un système qui a une double fonction, refroidir ou réchauffer l'habitacle. Ce système fonctionne grâce à une certaine masse de gaz réfrigérant stocké dans un réservoir.

On suppose que, par défaut d'étanchéité, le système perd naturellement 0.192 gramme de gaz chaque jour.

Un automobiliste possède un véhicule pour lequel la masse de gaz dans le réservoir est initialement de 630 grammes.

Partie A

Le constructeur préconise de recharger le réservoir lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 grammes.

Au bout de combien de jours le constructeur préconise-t-il à l'automobiliste de recharger ce réservoir ?

Partie B

Lors d'une visite d'entretien, le garagiste signale à l'automobiliste que le système de climatisation de son véhicule présente une baisse significative de masse de gaz : en plus de la perte naturelle de 0.192 gramme, le système perd $3\,\%$ de sa masse chaque jour.

Le garagiste recharge alors complètement le réservoir.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse de gaz dans le réservoir au bout de n jours après cette visite.

On a donc, $u_0 = 630$ et on admet que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = 0.97u_n - 0.192.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Voici un algorithme qui, lorsque l'on saisit un nombre N non nul de jours écoulés, calcule et affiche la masse de gaz restant dans le système.

```
Variables
    N : un nombre entier naturel
    k : un nombre entier naturel
    u : un nombre réel
Entrée
    Saisir N
Initialisation
    u prend la valeur 660
Traitement
    Pour k allant de 1 à ...
        u prend la valeur ...
    Fin pour
Sortie
    Afficher u
```

   (a) Recopier et compléter la partie relative au **traitement** de cet algorithme.
   (b) Quelle masse de gaz restera-t-il au bout de 20 jours ? Arrondir au gramme près.
3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = u_n + 6.4$.
   (a) Calculer v_0.
   (b) On admet que (v_n) est une suite géométrique de raison 0.97.
   Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 636.4 \times 0.97^n - 6.4$.
   (d) À l'aide de cette expression, vérifier le résultat obtenu à la **question 2.b.**
4. Résoudre $630 \times 0.97^n - 6.4 < 440$ puis interpréter le résultat.

Solution 2

Partie A

- Quantité à perdre avant recharge

$$630 - 440 = 190$$

- À raison d'une perte de 0.192 par jour. Il faudra recharger dans

$$\frac{190}{0.192} = 990 \text{ jours}$$

Partie B

1.

$$\begin{aligned} u_0 &= 630 \\ u_1 &= 0.97 \times u_0 - 0.192 = 610.908 \\ u_2 &= 0.97 \times u_1 - 0.192 = 592.38876 \end{aligned}$$

2.

Variables

N : un nombre entier naturel

k : un nombre entier naturel

u : un nombre réel

Entrée

Saisir N

Initialisation

u prend la valeur 660

Traitement

Pour k allant de 1 à N

u prend la valeur $0.97 * u - 0.192$

Fin pour

Sortie

Afficher u

3. Avec la calculatrice, on fait une table avec les valeurs de u
4. (a) $v_0 = u_0 + 6.4 = 630 + 6.4 = 636.4$

   (b) $v_n = 636.4 \times 0.97^n$

   (c) Comme $v_n = u_n + 6.4$ alors $u_n = v_n - 6.4$ et donc

$$u_n = 636.4 \times 0.97^n - 6.4$$

   (d) $u_{20} = 636.4 \times 0.97^{20} - 6.4 = 340$
5.

$$\begin{aligned}
630 \times 0.97^n - 6.4 &< 440 \\
630 \times 0.97^n &< 440 + 6.4 \\
0.97^n &< \frac{440 + 6.4}{630} \\
ln(0.97^n) &< ln\left(\frac{440 + 6.4}{630}\right) \\
n \times ln(0.97) &< ln\left(\frac{440 + 6.4}{630}\right) \\
n &> \frac{ln\left(\frac{440+6.4}{630}\right)}{ln 0.97}
\end{aligned}$$

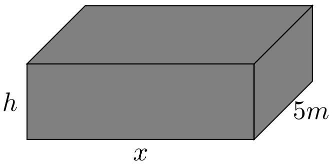
Il ne faut pas oublier d'inverser le sens de l'inégalité à la dernière étape car $ln(0.97)$ est négatif.
Le nombre trouvé est le nombre de jours qui vont passer avant de devoir recharger la climatisation.

DM 2 – GODET Raphaël

Terminale STI2D – 20 novembre 2019

Une part importante de la note sera dédiée à la rédaction, aux explications et à l'utilisation des notations mathématiques.

Exercice 1 — Optimisation de matière



On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $15m^3$. La longueur est aussi fixée à $5m$ par le cahier des charges.
On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.

1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \frac{3}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 10x + 6 + \frac{30}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{10x^2 + 6x + 30}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{-30 + 10x^2}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 15$, h doit être égale à $\frac{3}{2}$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 15$, h doit être égale à $\frac{3}{3}$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{aligned} V &= h \times x \times 5 \\ 15 &= h \times x \times 5 \\ x &= \frac{15}{h \times 5} = \frac{3}{h} \end{aligned}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{aligned} S(x) &= x \times h \times 2 + x \times 5 \times 2 + h \times 5 \times 2 \\ S(x) &= x \times \frac{3}{x} \times 2 + x \times 5 \times 2 + \frac{3}{x} \times 5 \times 2 \\ S(x) &= 10x + 6 + \frac{30}{x} \end{aligned}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{aligned} S(x) &= 10x + 6 + \frac{30}{x} \\ S(x) &= \frac{10x \times x}{x} + \frac{6 \times x}{x} + \frac{30}{x} \\ S(x) &= \frac{10x^2 + 6x + 30}{x} \end{aligned}$$

5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver

$$u(x) = 10x^2 + 6x + 30 \Rightarrow u'(x) = 6 + 20x$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (6 + 20x) \times x - (10x^2 + 6x + 30) \times 1 \\ &= -30 + 10x^2 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{-30 + 10x^2}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S

- Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Signe de $-30 + 10x^2$: c'est un polynôme du 2e degré

$$\Delta = 1200 > 0$$

Il y a donc 2 racines

$$x_1 = -1.7320508075688774 \qquad x_2 = 1.7320508075688774$$

Et on sait que $-30 + 10x^2$ est du signe de a donc positif en dehors des racines

- Le dénominateur x^2 est toujours positif.
- Tableau de variations

x	0		-1.7320508075688774		10
$-30 + 10x^2$	||	$-$	0	$+$	
x^2	||	$+$		$+$	
S'	||	$-$	0	$+$	
S	||	$\searrow$		$\nearrow$	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 1.7320508075688774$ et $h = 5.1961524227066322$.

Exercice 2 climatisation

La climatisation d'un véhicule automobile est un système qui a une double fonction, refroidir ou réchauffer l'habitacle. Ce système fonctionne grâce à une certaine masse de gaz réfrigérant stocké dans un réservoir.

On suppose que, par défaut d'étanchéité, le système perd naturellement 0.305 gramme de gaz chaque jour.

Un automobiliste possède un véhicule pour lequel la masse de gaz dans le réservoir est initialement de 650 grammes.

Partie A

Le constructeur préconise de recharger le réservoir lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 grammes.

Au bout de combien de jours le constructeur préconise-t-il à l'automobiliste de recharger ce réservoir ?

Partie B

Lors d'une visite d'entretien, le garagiste signale à l'automobiliste que le système de climatisation de son véhicule présente une baisse significative de masse de gaz : en plus de la perte naturelle de 0.305 gramme, le système perd $5\,\%$ de sa masse chaque jour.

Le garagiste recharge alors complètement le réservoir.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse de gaz dans le réservoir au bout de n jours après cette visite.

On a donc, $u_0 = 650$ et on admet que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = 0.95u_n - 0.305.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Voici un algorithme qui, lorsque l'on saisit un nombre N non nul de jours écoulés, calcule et affiche la masse de gaz restant dans le système.

Variables

  N : un nombre entier naturel

  k : un nombre entier naturel

  u : un nombre réel

Entrée

  Saisir N

Initialisation

  u prend la valeur 660

Traitement

  Pour k allant de 1 à …

    u prend la valeur …

  Fin pour

Sortie

  Afficher u

   (a) Recopier et compléter la partie relative au **traitement** de cet algorithme.
   (b) Quelle masse de gaz restera-t-il au bout de 20 jours ? Arrondir au gramme près.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = u_n + 6.1$.
   (a) Calculer v_0.
   (b) On admet que (v_n) est une suite géométrique de raison 0.95.
   Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 656.1 \times 0.95^n - 6.1$.
   (d) À l'aide de cette expression, vérifier le résultat obtenu à la **question 2.b.**

4. Résoudre $650 \times 0.95^n - 6.1 < 440$ puis interpréter le résultat.

Solution 2

Partie A

- Quantité à perdre avant recharge
$$650 - 440 = 210$$
- À raison d'une perte de 0.305 par jour. Il faudra recharger dans
$$\frac{210}{0.305} = 689 \text{ jours}$$

Partie B

1.

$$\begin{aligned} u_0 &= 650 \\ u_1 &= 0.95 \times u_0 - 0.305 = 617.195 \\ u_2 &= 0.95 \times u_1 - 0.305 = 586.03025 \end{aligned}$$

2.

Variables

N : un nombre entier naturel

k : un nombre entier naturel

u : un nombre réel

Entrée

Saisir N

Initialisation

u prend la valeur 660

Traitement

Pour k allant de 1 à N

u prend la valeur $0.95 * u - 0.305$

Fin pour

Sortie

Afficher u

3. Avec la calculatrice, on fait une table avec les valeurs de u
4. (a) $v_0 = u_0 + 6.1 = 650 + 6.1 = 656.1$
   (b) $v_n = 656.1 \times 0.95^n$
   (c) Comme $v_n = u_n + 6.1$ alors $u_n = v_n - 6.1$ et donc

$$u_n = 656.1 \times 0.95^n - 6.1$$

   (d) $u_{20} = 656.1 \times 0.95^{20} - 6.1 = 229$
5.

$$\begin{aligned} 650 \times 0.95^n - 6.1 &< 440 \\ 650 \times 0.95^n &< 440 + 6.1 \\ 0.95^n &< \frac{440 + 6.1}{650} \\ ln(0.95^n) &< ln\left(\frac{440 + 6.1}{650}\right) \\ n \times ln(0.95) &< ln\left(\frac{440 + 6.1}{650}\right) \\ n &> \frac{ln\left(\frac{440+6.1}{650}\right)}{ln 0.95} \end{aligned}$$

Il ne faut pas oublier d'inverser le sens de l'inégalité à la dernière étape car $ln(0.95)$ est négatif.
Le nombre trouvé est le nombre de jours qui vont passer avant de devoir recharger la climatisation.

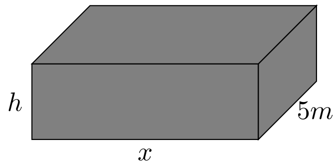
DM 2 – MENNAFI Abdallah

Terminale STI2D – 20 novembre 2019

Une part importante de la note sera dédiée à la rédaction, aux explications et à l'utilisation des notations mathématiques.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $30m^3$. La longueur est aussi fixée à $5m$ par le cahier des charges.
On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \dfrac{6}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 10x + 12 + \frac{60}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{10x^2 + 12x + 60}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{-60 + 10x^2}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 30$, h doit être égale à $\frac{6}{2}$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 30$, h doit être égale à $\frac{6}{3}$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{array}{rcl} V & = & h \times x \times 5 \\ 30 & = & h \times x \times 5 \\ x & = & \dfrac{30}{h \times 5} = \dfrac{6}{h} \end{array}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & x \times h \times 2 + x \times 5 \times 2 + h \times 5 \times 2 \\ S(x) & = & x \times \dfrac{6}{x} \times 2 + x \times 5 \times 2 + \dfrac{6}{x} \times 5 \times 2 \\ S(x) & = & 10x + 12 + \dfrac{60}{x} \end{array}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & 10x + 12 + \dfrac{60}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{10x \times x}{x} + \dfrac{12 \times x}{x} + \dfrac{60}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{10x^2 + 12x + 60}{x} \end{array}$$

5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver
$$u(x) = 10x^2 + 12x + 60 \Rightarrow u'(x) = 12 + 20x$$
$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$
Donc au numérateur on obtient
$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (12 + 20x) \times x - (10x^2 + 12x + 60) \times 1 \\ &= -60 + 10x^2 \end{aligned}$$
Donc
$$S'(x) = \frac{-60 + 10x^2}{x^2}$$
6. Tableau de variations de S
   - Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - Signe de $-60 + 10x^2$: c'est un polynôme du 2e degré
   $$\Delta = 2400 > 0$$
   Il y a donc 2 racines
   $$x_1 = -2.449489742783178 \qquad x_2 = 2.449489742783178$$
   Et on sait que $-60 + 10x^2$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
   - Le dénominateur x^2 est toujours positif.
   - Tableau de variations

x	0		-2.449489742783178		10
$-60 + 10x^2$	‖	$-$	0	$+$	
x^2	‖	$+$		$+$	
S'	‖	$-$	0	$+$	
S	‖	↘		↗	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 2.449489742783178$ et $h = 14.696938456699068$.

Exercice 2 climatisation

La climatisation d'un véhicule automobile est un système qui a une double fonction, refroidir ou réchauffer l'habitacle. Ce système fonctionne grâce à une certaine masse de gaz réfrigérant stocké dans un réservoir.

On suppose que, par défaut d'étanchéité, le système perd naturellement 0.372 gramme de gaz chaque jour.

Un automobiliste possède un véhicule pour lequel la masse de gaz dans le réservoir est initialement de 650 grammes.

Partie A

Le constructeur préconise de recharger le réservoir lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 grammes.

Au bout de combien de jours le constructeur préconise-t-il à l'automobiliste de recharger ce réservoir ?

Partie B

Lors d'une visite d'entretien, le garagiste signale à l'automobiliste que le système de climatisation de son véhicule présente une baisse significative de masse de gaz : en plus de la perte naturelle de 0.372 gramme, le système perd $6\,\%$ de sa masse chaque jour.

Le garagiste recharge alors complètement le réservoir.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse de gaz dans le réservoir au bout de n jours après cette visite.

On a donc, $u_0 = 650$ et on admet que pour tout entier naturel n, on a :
$$u_{n+1} = 0.94u_n - 0.372.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Voici un algorithme qui, lorsque l'on saisit un nombre N non nul de jours écoulés, calcule et affiche la masse de gaz restant dans le système.

Variables
  N : un nombre entier naturel
  k : un nombre entier naturel
  u : un nombre réel
Entrée
  Saisir N
Initialisation
  u prend la valeur 660
Traitement
  Pour k allant de 1 à ...
    u prend la valeur ...
  Fin pour
Sortie
  Afficher u

   (a) Recopier et compléter la partie relative au **traitement** de cet algorithme.
   (b) Quelle masse de gaz restera-t-il au bout de 20 jours ? Arrondir au gramme près.
3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = u_n + 6.2$.
   (a) Calculer v_0.
   (b) On admet que (v_n) est une suite géométrique de raison 0.94.
   Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 656.2 \times 0.94^n - 6.2$.
   (d) À l'aide de cette expression, vérifier le résultat obtenu à la **question 2.b.**
4. Résoudre $650 \times 0.94^n - 6.2 < 440$ puis interpréter le résultat.

Solution 2

Partie A

- Quantité à perdre avant recharge
$$650 - 440 = 210$$
- À raison d'une perte de 0.372 par jour. Il faudra recharger dans
$$\frac{210}{0.372} = 565 \text{ jours}$$

Partie B

1.
$$\begin{aligned} u_0 &= 650 \\ u_1 &= 0.94 \times u_0 - 0.372 = 610.628 \\ u_2 &= 0.94 \times u_1 - 0.372 = 573.61832 \end{aligned}$$

2.

Variables
N : un nombre entier naturel
k : un nombre entier naturel
u : un nombre réel
Entrée
Saisir N
Initialisation
u prend la valeur 660
Traitement
Pour k allant de 1 à N
u prend la valeur $0.94 * u - 0.372$
Fin pour
Sortie
Afficher u

3. Avec la calculatrice, on fait une table avec les valeurs de u
4. (a) $v_0 = u_0 + 6.2 = 650 + 6.2 = 656.2$
   (b) $v_n = 656.2 \times 0.94^n$
   (c) Comme $v_n = u_n + 6.2$ alors $u_n = v_n - 6.2$ et donc
   $$u_n = 656.2 \times 0.94^n - 6.2$$
   (d) $u_{20} = 656.2 \times 0.94^{20} - 6.2 = 184$
5.

$$\begin{array}{rcl} 650 \times 0.94^n - 6.2 & < & 440 \\ 650 \times 0.94^n & < & 440 + 6.2 \\ 0.94^n & < & \dfrac{440 + 6.2}{650} \\ ln(0.94^n) & < & ln\left(\dfrac{440 + 6.2}{650}\right) \\ n \times ln(0.94) & < & ln\left(\dfrac{440 + 6.2}{650}\right) \\ n & > & \dfrac{ln\left(\frac{440+6.2}{650}\right)}{ln 0.94} \end{array}$$

Il ne faut pas oublier d'inverser le sens de l'inégalité à la dernière étape car $ln(0.94)$ est négatif.
Le nombre trouvé est le nombre de jours qui vont passer avant de devoir recharger la climatisation.

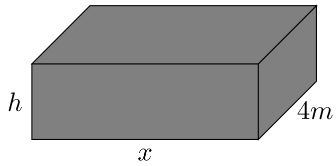
DM 2 – MOZET CARBAY Tristan

Terminale STI2D – 20 novembre 2019

Une part importante de la note sera dédiée à la rédaction, aux explications et à l'utilisation des notations mathématiques.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $16m^3$. La longueur est aussi fixée à $4m$ par le cahier des charges.
On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \dfrac{4}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 8x + 8 + \frac{32}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{8x^2 + 8x + 32}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{-32 + 8x^2}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 16$, h doit être égale à $\frac{4}{2}$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 16$, h doit être égale à $\frac{4}{3}$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{aligned} V &= h \times x \times 4 \\ 16 &= h \times x \times 4 \\ x &= \frac{16}{h \times 4} = \frac{4}{h} \end{aligned}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{aligned} S(x) &= x \times h \times 2 + x \times 4 \times 2 + h \times 4 \times 2 \\ S(x) &= x \times \frac{4}{x} \times 2 + x \times 4 \times 2 + \frac{4}{x} \times 4 \times 2 \\ S(x) &= 8x + 8 + \frac{32}{x} \end{aligned}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{aligned} S(x) &= 8x + 8 + \frac{32}{x} \\ S(x) &= \frac{8x \times x}{x} + \frac{8 \times x}{x} + \frac{32}{x} \\ S(x) &= \frac{8x^2 + 8x + 32}{x} \end{aligned}$$

5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver

$$u(x) = 8x^2 + 8x + 32 \Rightarrow u'(x) = 8 + 16x$$
$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (8 + 16x) \times x - (8x^2 + 8x + 32) \times 1 \\ &= -32 + 8x^2 \end{aligned}$$

Donc
$$S'(x) = \frac{-32 + 8x^2}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S
   - Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - Signe de $-32 + 8x^2$: c'est un polynôme du 2e degré
   $$\Delta = 1024 > 0$$
   Il y a donc 2 racines
   $$x_1 = -2 \qquad x_2 = 2$$
   Et on sait que $-32 + 8x^2$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
   - Le dénominateur x^2 est toujours positif.
   - Tableau de variations

x	0		-2		10
$-32 + 8x^2$	‖	$-$	0	$+$	
x^2	‖	$+$		$+$	
S'	‖	$-$	0	$+$	
S	‖	↘		↗	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 2$ et $h = 8$.

Exercice 2 climatisation

La climatisation d'un véhicule automobile est un système qui a une double fonction, refroidir ou réchauffer l'habitacle. Ce système fonctionne grâce à une certaine masse de gaz réfrigérant stocké dans un réservoir.

On suppose que, par défaut d'étanchéité, le système perd naturellement 0.558 gramme de gaz chaque jour.

Un automobiliste possède un véhicule pour lequel la masse de gaz dans le réservoir est initialement de 550 grammes.

Partie A

Le constructeur préconise de recharger le réservoir lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 grammes.

Au bout de combien de jours le constructeur préconise-t-il à l'automobiliste de recharger ce réservoir ?

Partie B

Lors d'une visite d'entretien, le garagiste signale à l'automobiliste que le système de climatisation de son véhicule présente une baisse significative de masse de gaz : en plus de la perte naturelle de 0.558 gramme, le système perd $9\,\%$ de sa masse chaque jour.

Le garagiste recharge alors complètement le réservoir.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse de gaz dans le réservoir au bout de n jours après cette visite.

On a donc, $u_0 = 550$ et on admet que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = 0.91u_n - 0.558.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Voici un algorithme qui, lorsque l'on saisit un nombre N non nul de jours écoulés, calcule et affiche la masse de gaz restant dans le système.

Variables
N : un nombre entier naturel
k : un nombre entier naturel
u : un nombre réel
Entrée
Saisir N
Initialisation
u prend la valeur 660
Traitement
Pour k allant de 1 à ...
u prend la valeur ...
Fin pour
Sortie
Afficher u

   (a) Recopier et compléter la partie relative au **traitement** de cet algorithme.
   (b) Quelle masse de gaz restera-t-il au bout de 20 jours ? Arrondir au gramme près.
3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = u_n + 6.2$.
   (a) Calculer v_0.
   (b) On admet que (v_n) est une suite géométrique de raison 0.91.
   Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 556.2 \times 0.91^n - 6.2$.
   (d) À l'aide de cette expression, vérifier le résultat obtenu à la **question 2.b.**
4. Résoudre $550 \times 0.91^n - 6.2 < 440$ puis interpréter le résultat.

Solution 2

Partie A

- Quantité à perdre avant recharge
$$550 - 440 = 110$$
- À raison d'une perte de 0.558 par jour. Il faudra recharger dans
$$\frac{110}{0.558} = 197 \text{ jours}$$

Partie B

1.

$$\begin{aligned} u_0 &= 550 \\ u_1 &= 0.91 \times u_0 - 0.558 = 499.942 \\ u_2 &= 0.91 \times u_1 - 0.558 = 454.38922 \end{aligned}$$

2.

Variables

N : un nombre entier naturel

k : un nombre entier naturel

u : un nombre réel

Entrée

Saisir N

Initialisation

u prend la valeur 660

Traitement

Pour k allant de 1 à N

u prend la valeur $0.91 * u - 0.558$

Fin pour

Sortie

Afficher u

3. Avec la calculatrice, on fait une table avec les valeurs de u
4. (a) $v_0 = u_0 + 6.2 = 550 + 6.2 = 556.2$
   (b) $v_n = 556.2 \times 0.91^n$
   (c) Comme $v_n = u_n + 6.2$ alors $u_n = v_n - 6.2$ et donc
   $$u_n = 556.2 \times 0.91^n - 6.2$$
   (d) $u_{20} = 556.2 \times 0.91^{20} - 6.2 = 78$
5.
$$\begin{aligned}
550 \times 0.91^n - 6.2 &< 440 \\
550 \times 0.91^n &< 440 + 6.2 \\
0.91^n &< \frac{440 + 6.2}{550} \\
ln(0.91^n) &< ln\left(\frac{440 + 6.2}{550}\right) \\
n \times ln(0.91) &< ln\left(\frac{440 + 6.2}{550}\right) \\
n &> \frac{ln\left(\frac{440+6.2}{550}\right)}{ln 0.91}
\end{aligned}$$

Il ne faut pas oublier d'inverser le sens de l'inégalité à la dernière étape car $ln(0.91)$ est négatif.
Le nombre trouvé est le nombre de jours qui vont passer avant de devoir recharger la climatisation.

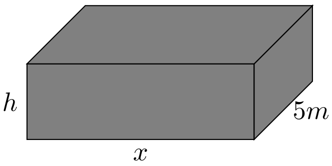
DM 2 – NOE Corentin

Terminale STI2D – 20 novembre 2019

Une part importante de la note sera dédiée à la rédaction, aux explications et à l'utilisation des notations mathématiques.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $10m^3$. La longueur est aussi fixée à $5m$ par le cahier des charges.
On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \dfrac{2}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 10x + 4 + \frac{20}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{10x^2 + 4x + 20}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{-20 + 10x^2}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 10$, h doit être égale à $\frac{2}{2}$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 10$, h doit être égale à $\frac{2}{3}$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{array}{rcl} V & = & h \times x \times 5 \\ 10 & = & h \times x \times 5 \\ x & = & \dfrac{10}{h \times 5} = \dfrac{2}{h} \end{array}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & x \times h \times 2 + x \times 5 \times 2 + h \times 5 \times 2 \\ S(x) & = & x \times \dfrac{2}{x} \times 2 + x \times 5 \times 2 + \dfrac{2}{x} \times 5 \times 2 \\ S(x) & = & 10x + 4 + \dfrac{20}{x} \end{array}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & 10x + 4 + \dfrac{20}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{10x \times x}{x} + \dfrac{4 \times x}{x} + \dfrac{20}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{10x^2 + 4x + 20}{x} \end{array}$$

5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver

$$u(x) = 10x^2 + 4x + 20 \Rightarrow u'(x) = 4 + 20x$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (4 + 20x) \times x - (10x^2 + 4x + 20) \times 1 \\ &= -20 + 10x^2 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{-20 + 10x^2}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S
   - Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - Signe de $-20 + 10x^2$: c'est un polynôme du 2e degré

   $$\Delta = 800 > 0$$

   Il y a donc 2 racines

   $$x_1 = -1.4142135623730951 \qquad x_2 = 1.4142135623730951$$

   Et on sait que $-20 + 10x^2$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
   - Le dénominateur x^2 est toujours positif.
   - Tableau de variations

x	0		-1.4142135623730951		10
$-20 + 10x^2$	$\|$	$-$	0	$+$	
x^2	$\|$	$+$		$+$	
S'	$\|$	$-$	0	$+$	
S	$\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 1.4142135623730951$ et $h = 2.8284271247461902$.

Exercice 2 — climatisation

La climatisation d'un véhicule automobile est un système qui a une double fonction, refroidir ou réchauffer l'habitacle. Ce système fonctionne grâce à une certaine masse de gaz réfrigérant stocké dans un réservoir.

On suppose que, par défaut d'étanchéité, le système perd naturellement 0.09 gramme de gaz chaque jour.

Un automobiliste possède un véhicule pour lequel la masse de gaz dans le réservoir est initialement de 680 grammes.

Partie A

Le constructeur préconise de recharger le réservoir lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 grammes.

Au bout de combien de jours le constructeur préconise-t-il à l'automobiliste de recharger ce réservoir ?

Partie B

Lors d'une visite d'entretien, le garagiste signale à l'automobiliste que le système de climatisation de son véhicule présente une baisse significative de masse de gaz : en plus de la perte naturelle de 0.09 gramme, le système perd $5\,\%$ de sa masse chaque jour.

Le garagiste recharge alors complètement le réservoir.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse de gaz dans le réservoir au bout de n jours après cette visite.

On a donc, $u_0 = 680$ et on admet que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = 0.95u_n - 0.09.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Voici un algorithme qui, lorsque l'on saisit un nombre N non nul de jours écoulés, calcule et affiche la masse de gaz restant dans le système.

```
Variables
    N : un nombre entier naturel
    k : un nombre entier naturel
    u : un nombre réel
Entrée
    Saisir N
Initialisation
    u prend la valeur 660
Traitement
    Pour k allant de 1 à ...
        u prend la valeur ...
    Fin pour
Sortie
    Afficher u
```

   (a) Recopier et compléter la partie relative au **traitement** de cet algorithme.

   (b) Quelle masse de gaz restera-t-il au bout de 20 jours ? Arrondir au gramme près.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = u_n + 1.8$.

   (a) Calculer v_0.

   (b) On admet que (v_n) est une suite géométrique de raison 0.95.
   Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 681.8 \times 0.95^n - 1.8$.

   (d) À l'aide de cette expression, vérifier le résultat obtenu à la **question 2.b.**

4. Résoudre $680 \times 0.95^n - 1.8 < 440$ puis interpréter le résultat.

Solution 2

Partie A

- Quantité à perdre avant recharge

$$680 - 440 = 240$$

- À raison d'une perte de 0.09 par jour. Il faudra recharger dans

$$\frac{240}{0.09} = 2667 \text{ jours}$$

Partie B

1.

$$\begin{aligned} u_0 &= 680 \\ u_1 &= 0.95 \times u_0 - 0.09 = 645.91 \\ u_2 &= 0.95 \times u_1 - 0.09 = 613.5245 \end{aligned}$$

2.

Variables

N : un nombre entier naturel

k : un nombre entier naturel

u : un nombre réel

Entrée

Saisir N

Initialisation

u prend la valeur 660

Traitement

Pour k allant de 1 à N

u prend la valeur $0.95 * u - 0.09$

Fin pour

Sortie

Afficher u

3. Avec la calculatrice, on fait une table avec les valeurs de u
4. (a) $v_0 = u_0 + 1.8 = 680 + 1.8 = 681.8$

   (b) $v_n = 681.8 \times 0.95^n$

   (c) Comme $v_n = u_n + 1.8$ alors $u_n = v_n - 1.8$ et donc

   $$u_n = 681.8 \times 0.95^n - 1.8$$

   (d) $u_{20} = 681.8 \times 0.95^{20} - 1.8 = 243$
5.

$$\begin{aligned} 680 \times 0.95^n - 1.8 &< 440 \\ 680 \times 0.95^n &< 440 + 1.8 \\ 0.95^n &< \frac{440+1.8}{680} \\ ln(0.95^n) &< ln\left(\frac{440+1.8}{680}\right) \\ n \times ln(0.95) &< ln\left(\frac{440+1.8}{680}\right) \\ n &> \frac{ln\left(\frac{440+1.8}{680}\right)}{ln 0.95} \end{aligned}$$

Il ne faut pas oublier d'inverser le sens de l'inégalité à la dernière étape car $ln(0.95)$ est négatif.
Le nombre trouvé est le nombre de jours qui vont passer avant de devoir recharger la climatisation.

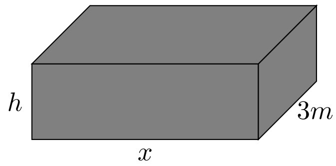
DM 2 – PAUL Jimmy

Terminale STI2D – 20 novembre 2019

Une part importante de la note sera dédiée à la rédaction, aux explications et à l'utilisation des notations mathématiques.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $6m^3$. La longueur est aussi fixée à $3m$ par le cahier des charges.
On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \frac{2}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 6x + 4 + \frac{12}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{6x^2 + 4x + 12}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{-12 + 6x^2}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 6$, h doit être égale à $\frac{2}{2}$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 6$, h doit être égale à $\frac{2}{3}$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{aligned} V &= h \times x \times 3 \\ 6 &= h \times x \times 3 \\ x &= \frac{6}{h \times 3} = \frac{2}{h} \end{aligned}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{aligned} S(x) &= x \times h \times 2 + x \times 3 \times 2 + h \times 3 \times 2 \\ S(x) &= x \times \frac{2}{x} \times 2 + x \times 3 \times 2 + \frac{2}{x} \times 3 \times 2 \\ S(x) &= 6x + 4 + \frac{12}{x} \end{aligned}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{aligned} S(x) &= 6x + 4 + \frac{12}{x} \\ S(x) &= \frac{6x \times x}{x} + \frac{4 \times x}{x} + \frac{12}{x} \\ S(x) &= \frac{6x^2 + 4x + 12}{x} \end{aligned}$$

5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver

$$u(x) = 6x^2 + 4x + 12 \Rightarrow u'(x) = 4 + 12x$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (4 + 12x) \times x - (6x^2 + 4x + 12) \times 1 \\ &= -12 + 6x^2 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{-12 + 6x^2}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S
   - Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - Signe de $-12 + 6x^2$: c'est un polynôme du 2e degré

     $$\Delta = 288 > 0$$

     Il y a donc 2 racines

     $$x_1 = -1.414213562373095 \qquad x_2 = 1.414213562373095$$

     Et on sait que $-12 + 6x^2$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
   - Le dénominateur x^2 est toujours positif.
   - Tableau de variations

x	0		-1.414213562373095		10
$-12 + 6x^2$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
x^2	$\|\|$	$+$		$+$	
S'	$\|\|$	$-$	0	$+$	
S	$\|\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 1.414213562373095$ et $h = 2.8284271247461 90$.

Exercice 2 climatisation

La climatisation d'un véhicule automobile est un système qui a une double fonction, refroidir ou réchauffer l'habitacle. Ce système fonctionne grâce à une certaine masse de gaz réfrigérant stocké dans un réservoir.

On suppose que, par défaut d'étanchéité, le système perd naturellement 0.297 gramme de gaz chaque jour.

Un automobiliste possède un véhicule pour lequel la masse de gaz dans le réservoir est initialement de 570 grammes.

Partie A

Le constructeur préconise de recharger le réservoir lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 grammes.

Au bout de combien de jours le constructeur préconise-t-il à l'automobiliste de recharger ce réservoir ?

Partie B

Lors d'une visite d'entretien, le garagiste signale à l'automobiliste que le système de climatisation de son véhicule présente une baisse significative de masse de gaz : en plus de la perte naturelle de 0.297 gramme, le système perd $3\,\%$ de sa masse chaque jour.

Le garagiste recharge alors complètement le réservoir.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse de gaz dans le réservoir au bout de n jours après cette visite.

On a donc, $u_0 = 570$ et on admet que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = 0.97u_n - 0.297.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Voici un algorithme qui, lorsque l'on saisit un nombre N non nul de jours écoulés, calcule et affiche la masse de gaz restant dans le système.

```
Variables
    N : un nombre entier naturel
    k : un nombre entier naturel
    u : un nombre réel
Entrée
    Saisir N
Initialisation
    u prend la valeur 660
Traitement
    Pour k allant de 1 à ...
        u prend la valeur ...
    Fin pour
Sortie
    Afficher u
```

   (a) Recopier et compléter la partie relative au **traitement** de cet algorithme.
   (b) Quelle masse de gaz restera-t-il au bout de 20 jours ? Arrondir au gramme près.
3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = u_n + 9.9$.
   (a) Calculer v_0.
   (b) On admet que (v_n) est une suite géométrique de raison 0.97.
   Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 579.9 \times 0.97^n - 9.9$.
   (d) À l'aide de cette expression, vérifier le résultat obtenu à la **question 2.b.**
4. Résoudre $570 \times 0.97^n - 9.9 < 440$ puis interpréter le résultat.

Solution 2

Partie A

- Quantité à perdre avant recharge
$$570 - 440 = 130$$
- À raison d'une perte de 0.297 par jour. Il faudra recharger dans
$$\frac{130}{0.297} = 438 \text{ jours}$$

Partie B

1.

$$\begin{aligned}
u_0 &= 570 \\
u_1 &= 0.97 \times u_0 - 0.297 = 552.603 \\
u_2 &= 0.97 \times u_1 - 0.297 = 535.72791
\end{aligned}$$

2.

Variables

N : un nombre entier naturel

k : un nombre entier naturel

u : un nombre réel

Entrée

Saisir N

Initialisation

u prend la valeur 660

Traitement

Pour k allant de 1 à N

u prend la valeur $0.97 * u - 0.297$

Fin pour

Sortie

Afficher u

3. Avec la calculatrice, on fait une table avec les valeurs de u
4. (a) $v_0 = u_0 + 9.9 = 570 + 9.9 = 579.9$

   (b) $v_n = 579.9 \times 0.97^n$

   (c) Comme $v_n = u_n + 9.9$ alors $u_n = v_n - 9.9$ et donc

   $$u_n = 579.9 \times 0.97^n - 9.9$$

   (d) $u_{20} = 579.9 \times 0.97^{20} - 9.9 = 305$
5.

$$\begin{array}{rcl}
570 \times 0.97^n - 9.9 & < & 440 \\
570 \times 0.97^n & < & 440 + 9.9 \\
0.97^n & < & \dfrac{440 + 9.9}{570} \\
ln(0.97^n) & < & ln\left(\dfrac{440 + 9.9}{570}\right) \\
n \times ln(0.97) & < & ln\left(\dfrac{440 + 9.9}{570}\right) \\
n & > & \dfrac{ln\left(\frac{440+9.9}{570}\right)}{ln 0.97}
\end{array}$$

Il ne faut pas oublier d'inverser le sens de l'inégalité à la dernière étape car $ln(0.97)$ est négatif.
Le nombre trouvé est le nombre de jours qui vont passer avant de devoir recharger la climatisation.

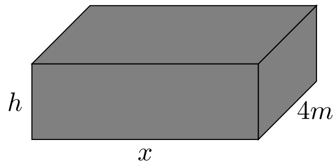
DM 2 – PERRIN Jérémy

Terminale STI2D – 20 novembre 2019

Une part importante de la note sera dédiée à la rédaction, aux explications et à l'utilisation des notations mathématiques.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $28m^3$. La longueur est aussi fixée à $4m$ par le cahier des charges.
On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \dfrac{7}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 8x + 14 + \frac{56}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{8x^2 + 14x + 56}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{-56 + 8x^2}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 28$, h doit être égale à $\frac{7}{2}$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 28$, h doit être égale à $\frac{7}{3}$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{array}{rcl} V & = & h \times x \times 4 \\ 28 & = & h \times x \times 4 \\ x & = & \dfrac{28}{h \times 4} = \dfrac{7}{h} \end{array}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & x \times h \times 2 + x \times 4 \times 2 + h \times 4 \times 2 \\ S(x) & = & x \times \dfrac{7}{x} \times 2 + x \times 4 \times 2 + \dfrac{7}{x} \times 4 \times 2 \\ S(x) & = & 8x + 14 + \dfrac{56}{x} \end{array}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & 8x + 14 + \dfrac{56}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{8x \times x}{x} + \dfrac{14 \times x}{x} + \dfrac{56}{x} \\ S(x) & = & \dfrac{8x^2 + 14x + 56}{x} \end{array}$$

5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver

$$u(x) = 8x^2 + 14x + 56 \Rightarrow u'(x) = 14 + 16x$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (14 + 16x) \times x - (8x^2 + 14x + 56) \times 1 \\ &= -56 + 8x^2 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{-56 + 8x^2}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S

- Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Signe de $-56 + 8x^2$: c'est un polynôme du 2e degré

$$\Delta = 1792 > 0$$

Il y a donc 2 racines

$$x_1 = -2.6457513110645907 \qquad x_2 = 2.6457513110645907$$

Et on sait que $-56 + 8x^2$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
- Le dénominateur x^2 est toujours positif.
- Tableau de variations

x	0		-2.6457513110645907		10
$-56 + 8x^2$	‖	$-$	0	$+$	
x^2	‖	$+$		$+$	
S'	‖	$-$	0	$+$	
S	‖	$\searrow$		$\nearrow$	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 2.6457513110645907$ et $h = 18.52025917745213\,49$.

Exercice 2 climatisation

La climatisation d'un véhicule automobile est un système qui a une double fonction, refroidir ou réchauffer l'habitacle. Ce système fonctionne grâce à une certaine masse de gaz réfrigérant stocké dans un réservoir.

On suppose que, par défaut d'étanchéité, le système perd naturellement 0.324 gramme de gaz chaque jour.

Un automobiliste possède un véhicule pour lequel la masse de gaz dans le réservoir est initialement de 680 grammes.

Partie A

Le constructeur préconise de recharger le réservoir lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 grammes.

Au bout de combien de jours le constructeur préconise-t-il à l'automobiliste de recharger ce réservoir ?

Partie B

Lors d'une visite d'entretien, le garagiste signale à l'automobiliste que le système de climatisation de son véhicule présente une baisse significative de masse de gaz : en plus de la perte naturelle de 0.324 gramme, le système perd $4\,\%$ de sa masse chaque jour.

Le garagiste recharge alors complètement le réservoir.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse de gaz dans le réservoir au bout de n jours après cette visite.

On a donc, $u_0 = 680$ et on admet que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = 0.96u_n - 0.324.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Voici un algorithme qui, lorsque l'on saisit un nombre N non nul de jours écoulés, calcule et affiche la masse de gaz restant dans le système.

```
Variables
    N : un nombre entier naturel
    k : un nombre entier naturel
    u : un nombre réel
Entrée
    Saisir N
Initialisation
    u prend la valeur 660
Traitement
    Pour k allant de 1 à ...
        u prend la valeur ...
    Fin pour
Sortie
    Afficher u
```

   (a) Recopier et compléter la partie relative au **traitement** de cet algorithme.
   (b) Quelle masse de gaz restera-t-il au bout de 20 jours ? Arrondir au gramme près.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = u_n + 8.1$.
   (a) Calculer v_0.
   (b) On admet que (v_n) est une suite géométrique de raison 0.96.
   Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 688.1 \times 0.96^n - 8.1$.
   (d) À l'aide de cette expression, vérifier le résultat obtenu à la **question 2.b.**

4. Résoudre $680 \times 0.96^n - 8.1 < 440$ puis interpréter le résultat.

Solution 2

Partie A

- Quantité à perdre avant recharge
$$680 - 440 = 240$$
- À raison d'une perte de 0.324 par jour. Il faudra recharger dans
$$\frac{240}{0.324} = 741 \text{ jours}$$

Partie B

1.

$$\begin{aligned} u_0 &= 680 \\ u_1 &= 0.96 \times u_0 - 0.324 = 652.476 \\ u_2 &= 0.96 \times u_1 - 0.324 = 626.05296 \end{aligned}$$

2.

Variables

N : un nombre entier naturel

k : un nombre entier naturel

u : un nombre réel

Entrée

Saisir N

Initialisation

u prend la valeur 660

Traitement

Pour k allant de 1 à N

u prend la valeur $0.96 * u - 0.324$

Fin pour

Sortie

Afficher u

3. Avec la calculatrice, on fait une table avec les valeurs de u
4. (a) $v_0 = u_0 + 8.1 = 680 + 8.1 = 688.1$

   (b) $v_n = 688.1 \times 0.96^n$

   (c) Comme $v_n = u_n + 8.1$ alors $u_n = v_n - 8.1$ et donc

   $$u_n = 688.1 \times 0.96^n - 8.1$$

   (d) $u_{20} = 688.1 \times 0.96^{20} - 8.1 = 296$
5.

$$\begin{aligned} 680 \times 0.96^n - 8.1 &< 440 \\ 680 \times 0.96^n &< 440 + 8.1 \\ 0.96^n &< \frac{440 + 8.1}{680} \\ ln(0.96^n) &< ln\left(\frac{440 + 8.1}{680}\right) \\ n \times ln(0.96) &< ln\left(\frac{440 + 8.1}{680}\right) \\ n &> \frac{ln\left(\frac{440+8.1}{680}\right)}{ln 0.96} \end{aligned}$$

Il ne faut pas oublier d'inverser le sens de l'inégalité à la dernière étape car $ln(0.96)$ est négatif.
Le nombre trouvé est le nombre de jours qui vont passer avant de devoir recharger la climatisation.

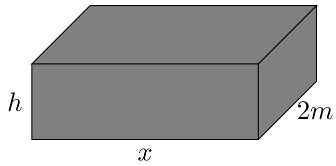
DM 2 – PROST Maxime

Terminale STI2D – 20 novembre 2019

Une part importante de la note sera dédiée à la rédaction, aux explications et à l'utilisation des notations mathématiques.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $14m^3$. La longueur est aussi fixée à $2m$ par le cahier des charges.
On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \frac{7}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 4x + 14 + \frac{28}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{4x^2 + 14x + 28}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{-28 + 4x^2}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 14$, h doit être égale à $\frac{7}{2}$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 14$, h doit être égale à $\frac{7}{3}$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{aligned} V &= h \times x \times 2 \\ 14 &= h \times x \times 2 \\ x &= \frac{14}{h \times 2} = \frac{7}{h} \end{aligned}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{aligned} S(x) &= x \times h \times 2 + x \times 2 \times 2 + h \times 2 \times 2 \\ S(x) &= x \times \frac{7}{x} \times 2 + x \times 2 \times 2 + \frac{7}{x} \times 2 \times 2 \\ S(x) &= 4x + 14 + \frac{28}{x} \end{aligned}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{aligned} S(x) &= 4x + 14 + \frac{28}{x} \\ S(x) &= \frac{4x \times x}{x} + \frac{14 \times x}{x} + \frac{28}{x} \\ S(x) &= \frac{4x^2 + 14x + 28}{x} \end{aligned}$$

5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver

$$u(x) = 4x^2 + 14x + 28 \Rightarrow u'(x) = 14 + 8x$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (14 + 8x) \times x - (4x^2 + 14x + 28) \times 1 \\ &= -28 + 4x^2 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{-28 + 4x^2}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S

- Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Signe de $-28 + 4x^2$: c'est un polynôme du 2e degré

$$\Delta = 448 > 0$$

Il y a donc 2 racines

$$x_1 = -2.6457513110645907 \qquad x_2 = 2.6457513110645907$$

Et on sait que $-28 + 4x^2$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
- Le dénominateur x^2 est toujours positif.
- Tableau de variations

x	0		-2.6457513110645907		10
$-28 + 4x^2$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
x^2	$\Vert$	$+$		$+$	
S'	$\Vert$	$-$	0	$+$	
S	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 2.6457513110645907$ et $h = 18.52025917745213 49$.

Exercice 2 climatisation

La climatisation d'un véhicule automobile est un système qui a une double fonction, refroidir ou réchauffer l'habitacle. Ce système fonctionne grâce à une certaine masse de gaz réfrigérant stocké dans un réservoir.

On suppose que, par défaut d'étanchéité, le système perd naturellement 0.072 gramme de gaz chaque jour.

Un automobiliste possède un véhicule pour lequel la masse de gaz dans le réservoir est initialement de 530 grammes.

Partie A

Le constructeur préconise de recharger le réservoir lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 grammes.

Au bout de combien de jours le constructeur préconise-t-il à l'automobiliste de recharger ce réservoir ?

Partie B

Lors d'une visite d'entretien, le garagiste signale à l'automobiliste que le système de climatisation de son véhicule présente une baisse significative de masse de gaz : en plus de la perte naturelle de 0.072 gramme, le système perd $2\,\%$ de sa masse chaque jour.

Le garagiste recharge alors complètement le réservoir.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse de gaz dans le réservoir au bout de n jours après cette visite.

On a donc, $u_0 = 530$ et on admet que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = 0.98u_n - 0.072.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Voici un algorithme qui, lorsque l'on saisit un nombre N non nul de jours écoulés, calcule et affiche la masse de gaz restant dans le système.

Variables
N : un nombre entier naturel
k : un nombre entier naturel
u : un nombre réel
Entrée
Saisir N
Initialisation
u prend la valeur 660
Traitement
Pour k allant de 1 à …
u prend la valeur …
Fin pour
Sortie
Afficher u

   (a) Recopier et compléter la partie relative au **traitement** de cet algorithme.
   (b) Quelle masse de gaz restera-t-il au bout de 20 jours ? Arrondir au gramme près.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = u_n + 3.6$.
   (a) Calculer v_0.
   (b) On admet que (v_n) est une suite géométrique de raison 0.98.
   Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 533.6 \times 0.98^n - 3.6$.
   (d) À l'aide de cette expression, vérifier le résultat obtenu à la **question 2.b.**
4. Résoudre $530 \times 0.98^n - 3.6 < 440$ puis interpréter le résultat.

Solution 2

Partie A

- Quantité à perdre avant recharge
$$530 - 440 = 90$$
- À raison d'une perte de 0.072 par jour. Il faudra recharger dans
$$\frac{90}{0.072} = 1250 \text{ jours}$$

Partie B

1.

$$\begin{aligned} u_0 &= 530 \\ u_1 &= 0.98 \times u_0 - 0.072 = 519.328 \\ u_2 &= 0.98 \times u_1 - 0.072 = 508.86944 \end{aligned}$$

2.

```
Variables
    N : un nombre entier naturel
    k : un nombre entier naturel
    u : un nombre réel
Entrée
    Saisir N
Initialisation
    u prend la valeur 660
Traitement
    Pour k allant de 1 à N
        u prend la valeur 0.98 * u − 0.072
    Fin pour
Sortie
    Afficher u
```

3. Avec la calculatrice, on fait une table avec les valeurs de u
4. (a) $v_0 = u_0 + 3.6 = 530 + 3.6 = 533.6$
   (b) $v_n = 533.6 \times 0.98^n$
   (c) Comme $v_n = u_n + 3.6$ alors $u_n = v_n - 3.6$ et donc
   $$u_n = 533.6 \times 0.98^n - 3.6$$
   (d) $u_{20} = 533.6 \times 0.98^{20} - 3.6 = 353$
5.

$$\begin{aligned} 530 \times 0.98^n - 3.6 &< 440 \\ 530 \times 0.98^n &< 440 + 3.6 \\ 0.98^n &< \frac{440 + 3.6}{530} \\ ln(0.98^n) &< ln\left(\frac{440 + 3.6}{530}\right) \\ n \times ln(0.98) &< ln\left(\frac{440 + 3.6}{530}\right) \\ n &> \frac{ln\left(\frac{440+3.6}{530}\right)}{ln 0.98} \end{aligned}$$

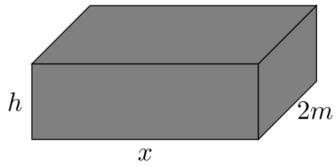
Il ne faut pas oublier d'inverser le sens de l'inégalité à la dernière étape car $ln(0.98)$ est négatif.
Le nombre trouvé est le nombre de jours qui vont passer avant de devoir recharger la climatisation.

DM 2 – RAYNAUD Stéphane

Terminale STI2D – 20 novembre 2019

Une part importante de la note sera dédiée à la rédaction, aux explications et à l'utilisation des notations mathématiques.

Exercice 1 — Optimisation de matière



On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $20m^3$. La longueur est aussi fixée à $2m$ par le cahier des charges.

On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.

1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \frac{10}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 4x + 20 + \frac{40}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{4x^2 + 20x + 40}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{-40 + 4x^2}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 20$, h doit être égale à $\frac{10}{2}$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 20$, h doit être égale à $\frac{10}{3}$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{array}{rcl} V & = & h \times x \times 2 \\ 20 & = & h \times x \times 2 \\ x & = & \frac{20}{h \times 2} = \frac{10}{h} \end{array}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & x \times h \times 2 + x \times 2 \times 2 + h \times 2 \times 2 \\ S(x) & = & x \times \frac{10}{x} \times 2 + x \times 2 \times 2 + \frac{10}{x} \times 2 \times 2 \\ S(x) & = & 4x + 20 + \frac{40}{x} \end{array}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{array}{rcl} S(x) & = & 4x + 20 + \frac{40}{x} \\ S(x) & = & \frac{4x \times x}{x} + \frac{20 \times x}{x} + \frac{40}{x} \\ S(x) & = & \frac{4x^2 + 20x + 40}{x} \end{array}$$

5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver

$$u(x) = 4x^2 + 20x + 40 \Rightarrow u'(x) = 20 + 8x$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (20 + 8x) \times x - (4x^2 + 20x + 40) \times 1 \\ &= -40 + 4x^2 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{-40 + 4x^2}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S

- Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Signe de $-40 + 4x^2$: c'est un polynôme du 2e degré

$$\Delta = 640 > 0$$

Il y a donc 2 racines

$$x_1 = -3.1622776601683795 \qquad x_2 = 3.1622776601683795$$

Et on sait que $-40 + 4x^2$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
- Le dénominateur x^2 est toujours positif.
- Tableau de variations

x	0		-3.1622776601683795		10
$-40 + 4x^2$	‖	$-$	0	$+$	
x^2	‖	$+$		$+$	
S'	‖	$-$	0	$+$	
S	‖	$\searrow$		$\nearrow$	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 3.1622776601683795$ et $h = 31.6227766016837950$.

Exercice 2 climatisation

La climatisation d'un véhicule automobile est un système qui a une double fonction, refroidir ou réchauffer l'habitacle. Ce système fonctionne grâce à une certaine masse de gaz réfrigérant stocké dans un réservoir.

On suppose que, par défaut d'étanchéité, le système perd naturellement 0.108 gramme de gaz chaque jour.

Un automobiliste possède un véhicule pour lequel la masse de gaz dans le réservoir est initialement de 500 grammes.

Partie A

Le constructeur préconise de recharger le réservoir lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 grammes.

Au bout de combien de jours le constructeur préconise-t-il à l'automobiliste de recharger ce réservoir ?

Partie B

Lors d'une visite d'entretien, le garagiste signale à l'automobiliste que le système de climatisation de son véhicule présente une baisse significative de masse de gaz : en plus de la perte naturelle de 0.108 gramme, le système perd $6\,\%$ de sa masse chaque jour.

Le garagiste recharge alors complètement le réservoir.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse de gaz dans le réservoir au bout de n jours après cette visite.

On a donc, $u_0 = 500$ et on admet que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = 0.94u_n - 0.108.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Voici un algorithme qui, lorsque l'on saisit un nombre N non nul de jours écoulés, calcule et affiche la masse de gaz restant dans le système.

Variables

N : un nombre entier naturel

k : un nombre entier naturel

u : un nombre réel

Entrée

Saisir N

Initialisation

u prend la valeur 660

Traitement

Pour k allant de 1 à ...

u prend la valeur ...

Fin pour

Sortie

Afficher u

   (a) Recopier et compléter la partie relative au **traitement** de cet algorithme.

   (b) Quelle masse de gaz restera-t-il au bout de 20 jours ? Arrondir au gramme près.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = u_n + 1.8$.

   (a) Calculer v_0.

   (b) On admet que (v_n) est une suite géométrique de raison 0.94.
   Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 501.8 \times 0.94^n - 1.8$.

   (d) À l'aide de cette expression, vérifier le résultat obtenu à la **question 2.b.**

4. Résoudre $500 \times 0.94^n - 1.8 < 440$ puis interpréter le résultat.

Solution 2

Partie A

- Quantité à perdre avant recharge
$$500 - 440 = 60$$
- À raison d'une perte de 0.108 par jour. Il faudra recharger dans
$$\frac{60}{0.108} = 556 \text{ jours}$$

Partie B

1.

$$\begin{aligned} u_0 &= 500 \\ u_1 &= 0.94 \times u_0 - 0.108 = 469.892 \\ u_2 &= 0.94 \times u_1 - 0.108 = 441.59048 \end{aligned}$$

2.

Variables

N : un nombre entier naturel

k : un nombre entier naturel

u : un nombre réel

Entrée

Saisir N

Initialisation

u prend la valeur 660

Traitement

Pour k allant de 1 à N

u prend la valeur $0.94 * u - 0.108$

Fin pour

Sortie

Afficher u

3. Avec la calculatrice, on fait une table avec les valeurs de u
4. (a) $v_0 = u_0 + 1.8 = 500 + 1.8 = 501.8$
   (b) $v_n = 501.8 \times 0.94^n$
   (c) Comme $v_n = u_n + 1.8$ alors $u_n = v_n - 1.8$ et donc

$$u_n = 501.8 \times 0.94^n - 1.8$$

   (d) $u_{20} = 501.8 \times 0.94^{20} - 1.8 = 144$
5.

$$\begin{aligned} 500 \times 0.94^n - 1.8 &< 440 \\ 500 \times 0.94^n &< 440 + 1.8 \\ 0.94^n &< \frac{440 + 1.8}{500} \\ ln(0.94^n) &< ln\left(\frac{440 + 1.8}{500}\right) \\ n \times ln(0.94) &< ln\left(\frac{440 + 1.8}{500}\right) \\ n &> \frac{ln\left(\frac{440+1.8}{500}\right)}{ln 0.94} \end{aligned}$$

Il ne faut pas oublier d'inverser le sens de l'inégalité à la dernière étape car $ln(0.94)$ est négatif.
Le nombre trouvé est le nombre de jours qui vont passer avant de devoir recharger la climatisation.

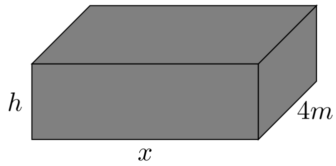
DM 2 – REY Benjamin

Terminale STI2D – 20 novembre 2019

Une part importante de la note sera dédiée à la rédaction, aux explications et à l'utilisation des notations mathématiques.

Exercice 1 — Optimisation de matière

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $12m^3$. La longueur est aussi fixée à $4m$ par le cahier des charges.
On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \dfrac{3}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 8x + 6 + \frac{24}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{8x^2 + 6x + 24}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{-24 + 8x^2}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 12$, h doit être égale à $\frac{3}{2}$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 12$, h doit être égale à $\frac{3}{3}$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{aligned} V &= h \times x \times 4 \\ 12 &= h \times x \times 4 \\ x &= \frac{12}{h \times 4} = \frac{3}{h} \end{aligned}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{aligned} S(x) &= x \times h \times 2 + x \times 4 \times 2 + h \times 4 \times 2 \\ S(x) &= x \times \frac{3}{x} \times 2 + x \times 4 \times 2 + \frac{3}{x} \times 4 \times 2 \\ S(x) &= 8x + 6 + \frac{24}{x} \end{aligned}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{aligned} S(x) &= 8x + 6 + \frac{24}{x} \\ S(x) &= \frac{8x \times x}{x} + \frac{6 \times x}{x} + \frac{24}{x} \\ S(x) &= \frac{8x^2 + 6x + 24}{x} \end{aligned}$$

5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver

$$u(x) = 8x^2 + 6x + 24 \Rightarrow u'(x) = 6 + 16x$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (6 + 16x) \times x - (8x^2 + 6x + 24) \times 1 \\ &= -24 + 8x^2 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{-24 + 8x^2}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S
   - Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - Signe de $-24 + 8x^2$: c'est un polynôme du 2e degré

   $$\Delta = 768 > 0$$

   Il y a donc 2 racines

   $$x_1 = -1.7320508075688772 \qquad x_2 = 1.7320508075688772$$

   Et on sait que $-24 + 8x^2$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
   - Le dénominateur x^2 est toujours positif.
   - Tableau de variations

x	0		-1.7320508075688772		10
$-24+8x^2$	‖	$-$	0	$+$	
x^2	‖	$+$		$+$	
S'	‖	$-$	0	$+$	
S	‖	$\searrow$		$\nearrow$	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 1.7320508075688772$ et $h = 5.1961524227066316$.

Exercice 2 climatisation

La climatisation d'un véhicule automobile est un système qui a une double fonction, refroidir ou réchauffer l'habitacle. Ce système fonctionne grâce à une certaine masse de gaz réfrigérant stocké dans un réservoir.

On suppose que, par défaut d'étanchéité, le système perd naturellement 0.104 gramme de gaz chaque jour.

Un automobiliste possède un véhicule pour lequel la masse de gaz dans le réservoir est initialement de 530 grammes.

Partie A

Le constructeur préconise de recharger le réservoir lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 grammes.

Au bout de combien de jours le constructeur préconise-t-il à l'automobiliste de recharger ce réservoir ?

Partie B

Lors d'une visite d'entretien, le garagiste signale à l'automobiliste que le système de climatisation de son véhicule présente une baisse significative de masse de gaz : en plus de la perte naturelle de 0.104 gramme, le système perd $4\,\%$ de sa masse chaque jour.

Le garagiste recharge alors complètement le réservoir.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse de gaz dans le réservoir au bout de n jours après cette visite.

On a donc, $u_0 = 530$ et on admet que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = 0.96u_n - 0.104.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Voici un algorithme qui, lorsque l'on saisit un nombre N non nul de jours écoulés, calcule et affiche la masse de gaz restant dans le système.

```
Variables
    N : un nombre entier naturel
    k : un nombre entier naturel
    u : un nombre réel
Entrée
    Saisir N
Initialisation
    u prend la valeur 660
Traitement
    Pour k allant de 1 à ...
        u prend la valeur ...
    Fin pour
Sortie
    Afficher u
```

   (a) Recopier et compléter la partie relative au **traitement** de cet algorithme.

   (b) Quelle masse de gaz restera-t-il au bout de 20 jours ? Arrondir au gramme près.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = u_n + 2.6$.

   (a) Calculer v_0.

   (b) On admet que (v_n) est une suite géométrique de raison 0.96.
   Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 532.6 \times 0.96^n - 2.6$.

   (d) À l'aide de cette expression, vérifier le résultat obtenu à la **question 2.b.**

4. Résoudre $530 \times 0.96^n - 2.6 < 440$ puis interpréter le résultat.

Solution 2

Partie A

- Quantité à perdre avant recharge
$$530 - 440 = 90$$
- À raison d'une perte de 0.104 par jour. Il faudra recharger dans
$$\frac{90}{0.104} = 865 \text{ jours}$$

Partie B

1.

$$\begin{aligned} u_0 &= 530 \\ u_1 &= 0.96 \times u_0 - 0.104 = 508.696 \\ u_2 &= 0.96 \times u_1 - 0.104 = 488.24416 \end{aligned}$$

2.

Variables

N : un nombre entier naturel

k : un nombre entier naturel

u : un nombre réel

Entrée

Saisir N

Initialisation

u prend la valeur 660

Traitement

Pour k allant de 1 à N

u prend la valeur $0.96 * u - 0.104$

Fin pour

Sortie

Afficher u

3. Avec la calculatrice, on fait une table avec les valeurs de u
4. (a) $v_0 = u_0 + 2.6 = 530 + 2.6 = 532.6$
   (b) $v_n = 532.6 \times 0.96^n$
   (c) Comme $v_n = u_n + 2.6$ alors $u_n = v_n - 2.6$ et donc

$$u_n = 532.6 \times 0.96^n - 2.6$$

   (d) $u_{20} = 532.6 \times 0.96^{20} - 2.6 = 233$
5.

$$\begin{aligned} 530 \times 0.96^n - 2.6 &< 440 \\ 530 \times 0.96^n &< 440 + 2.6 \\ 0.96^n &< \frac{440 + 2.6}{530} \\ ln(0.96^n) &< ln\left(\frac{440 + 2.6}{530}\right) \\ n \times ln(0.96) &< ln\left(\frac{440 + 2.6}{530}\right) \\ n &> \frac{ln\left(\frac{440+2.6}{530}\right)}{ln 0.96} \end{aligned}$$

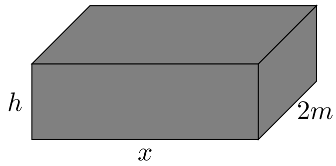
Il ne faut pas oublier d'inverser le sens de l'inégalité à la dernière étape car $ln(0.96)$ est négatif.
Le nombre trouvé est le nombre de jours qui vont passer avant de devoir recharger la climatisation.

DM 2 – RONDOT Mathis

Terminale STI2D – 20 novembre 2019

Une part importante de la note sera dédiée à la rédaction, aux explications et à l'utilisation des notations mathématiques.

Exercice 1 — Optimisation de matière



On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $4m^3$. La longueur est aussi fixée à $2m$ par le cahier des charges.

On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.

1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \frac{2}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 4x + 4 + \frac{8}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{4x^2 + 4x + 8}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{-8 + 4x^2}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 4$, h doit être égale à $\frac{2}{2}$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 4$, h doit être égale à $\frac{2}{3}$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{aligned} V &= h \times x \times 2 \\ 4 &= h \times x \times 2 \\ x &= \frac{4}{h \times 2} = \frac{2}{h} \end{aligned}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{aligned} S(x) &= x \times h \times 2 + x \times 2 \times 2 + h \times 2 \times 2 \\ S(x) &= x \times \frac{2}{x} \times 2 + x \times 2 \times 2 + \frac{2}{x} \times 2 \times 2 \\ S(x) &= 4x + 4 + \frac{8}{x} \end{aligned}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{aligned} S(x) &= 4x + 4 + \frac{8}{x} \\ S(x) &= \frac{4x \times x}{x} + \frac{4 \times x}{x} + \frac{8}{x} \\ S(x) &= \frac{4x^2 + 4x + 8}{x} \end{aligned}$$

5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver

$$u(x) = 4x^2 + 4x + 8 \Rightarrow u'(x) = 4 + 8x$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (4 + 8x) \times x - (4x^2 + 4x + 8) \times 1 \\ &= -8 + 4x^2 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{-8 + 4x^2}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S

- Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Signe de $-8 + 4x^2$: c'est un polynôme du 2e degré

$$\Delta = 128 > 0$$

Il y a donc 2 racines

$$x_1 = -1.4142135623730951 \qquad x_2 = 1.4142135623730951$$

Et on sait que $-8 + 4x^2$ est du signe de a donc positif en dehors des racines

- Le dénominateur x^2 est toujours positif.
- Tableau de variations

x	0		-1.4142135623730951		10
$-8 + 4x^2$	‖	$-$	0	$+$	
x^2	‖	$+$		$+$	
S'	‖	$-$	0	$+$	
S	‖	$\searrow$		$\nearrow$	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 1.4142135623730951$ et $h = 2.8284271247461902$.

Exercice 2 climatisation

La climatisation d'un véhicule automobile est un système qui a une double fonction, refroidir ou réchauffer l'habitacle. Ce système fonctionne grâce à une certaine masse de gaz réfrigérant stocké dans un réservoir.

On suppose que, par défaut d'étanchéité, le système perd naturellement 0.296 gramme de gaz chaque jour.

Un automobiliste possède un véhicule pour lequel la masse de gaz dans le réservoir est initialement de 680 grammes.

Partie A

Le constructeur préconise de recharger le réservoir lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 grammes.

Au bout de combien de jours le constructeur préconise-t-il à l'automobiliste de recharger ce réservoir ?

Partie B

Lors d'une visite d'entretien, le garagiste signale à l'automobiliste que le système de climatisation de son véhicule présente une baisse significative de masse de gaz : en plus de la perte naturelle de 0.296 gramme, le système perd $4\,\%$ de sa masse chaque jour.

Le garagiste recharge alors complètement le réservoir.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse de gaz dans le réservoir au bout de n jours après cette visite.

On a donc, $u_0 = 680$ et on admet que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = 0.96u_n - 0.296.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Voici un algorithme qui, lorsque l'on saisit un nombre N non nul de jours écoulés, calcule et affiche la masse de gaz restant dans le système.

```
Variables
    N : un nombre entier naturel
    k : un nombre entier naturel
    u : un nombre réel
Entrée
    Saisir N
Initialisation
    u prend la valeur 660
Traitement
    Pour k allant de 1 à ...
        u prend la valeur ...
    Fin pour
Sortie
    Afficher u
```

   (a) Recopier et compléter la partie relative au **traitement** de cet algorithme.

   (b) Quelle masse de gaz restera-t-il au bout de 20 jours ? Arrondir au gramme près.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = u_n + 7.4$.

   (a) Calculer v_0.

   (b) On admet que (v_n) est une suite géométrique de raison 0.96.
   Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 687.4 \times 0.96^n - 7.4$.

   (d) À l'aide de cette expression, vérifier le résultat obtenu à la **question 2.b.**

4. Résoudre $680 \times 0.96^n - 7.4 < 440$ puis interpréter le résultat.

Solution 2

Partie A

- Quantité à perdre avant recharge
$$680 - 440 = 240$$
- À raison d'une perte de 0.296 par jour. Il faudra recharger dans
$$\frac{240}{0.296} = 811 \text{ jours}$$

Partie B

1.

$$\begin{aligned} u_0 &= 680 \\ u_1 &= 0.96 \times u_0 - 0.296 = 652.504 \\ u_2 &= 0.96 \times u_1 - 0.296 = 626.10784 \end{aligned}$$

2.

Variables

N : un nombre entier naturel

k : un nombre entier naturel

u : un nombre réel

Entrée

Saisir N

Initialisation

u prend la valeur 660

Traitement

Pour k allant de 1 à N

u prend la valeur $0.96 * u - 0.296$

Fin pour

Sortie

Afficher u

3. Avec la calculatrice, on fait une table avec les valeurs de u
4. (a) $v_0 = u_0 + 7.4 = 680 + 7.4 = 687.4$

   (b) $v_n = 687.4 \times 0.96^n$

   (c) Comme $v_n = u_n + 7.4$ alors $u_n = v_n - 7.4$ et donc

   $$u_n = 687.4 \times 0.96^n - 7.4$$

   (d) $u_{20} = 687.4 \times 0.96^{20} - 7.4 = 296$
5.

$$\begin{aligned} 680 \times 0.96^n - 7.4 &< 440 \\ 680 \times 0.96^n &< 440 + 7.4 \\ 0.96^n &< \frac{440 + 7.4}{680} \\ ln(0.96^n) &< ln\left(\frac{440 + 7.4}{680}\right) \\ n \times ln(0.96) &< ln\left(\frac{440 + 7.4}{680}\right) \\ n &> \frac{ln\left(\frac{440+7.4}{680}\right)}{ln 0.96} \end{aligned}$$

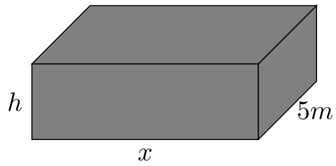
Il ne faut pas oublier d'inverser le sens de l'inégalité à la dernière étape car $ln(0.96)$ est négatif.
Le nombre trouvé est le nombre de jours qui vont passer avant de devoir recharger la climatisation.

DM 2 – ZENATI Nasser

Terminale STI2D – 20 novembre 2019

Une part importante de la note sera dédiée à la rédaction, aux explications et à l'utilisation des notations mathématiques.

Exercice 1 — Optimisation de matière



On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $35m^3$. La longueur est aussi fixée à $5m$ par le cahier des charges.

On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.

1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \dfrac{7}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
$$S(x) = 10x + 14 + \frac{70}{x}$$
4. Démontrer que
$$S(x) = \frac{10x^2 + 14x + 70}{x}$$
5. Démontrer que
$$S'(x) = \frac{-70 + 10x^2}{x^2}$$
6. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
7. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.

Solution 1

1. Le volume étant fixe si l'on fait varier x, h doit aussi varier.
   - Si $x = 2$ alors conserver un volume de $V = 35$, h doit être égale à $\frac{7}{2}$
   - Si $x = 3$ alors conserver un volume de $V = 35$, h doit être égale à $\frac{7}{3}$
2. Pour calculer le volume, on a
$$\begin{aligned} V &= h \times x \times 5 \\ 35 &= h \times x \times 5 \\ x &= \frac{35}{h \times 5} = \frac{7}{h} \end{aligned}$$
3. Pour calculer la surface totale, on ajoute la surface de chaque face. On a donc le calcul suivant
$$\begin{aligned} S(x) &= x \times h \times 2 + x \times 5 \times 2 + h \times 5 \times 2 \\ S(x) &= x \times \frac{7}{x} \times 2 + x \times 5 \times 2 + \frac{7}{x} \times 5 \times 2 \\ S(x) &= 10x + 14 + \frac{70}{x} \end{aligned}$$
4. Pour trouver cette nouvelle forme, on met chaque élément sur le même dénominateur
$$\begin{aligned} S(x) &= 10x + 14 + \frac{70}{x} \\ S(x) &= \frac{10x \times x}{x} + \frac{14 \times x}{x} + \frac{70}{x} \\ S(x) &= \frac{10x^2 + 14x + 70}{x} \end{aligned}$$

5. On retrouve la formule $\frac{u}{v}$ à dériver

$$u(x) = 10x^2 + 14x + 70 \Rightarrow u'(x) = 14 + 20x$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

Donc au numérateur on obtient

$$\begin{aligned} u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x) &= (14 + 20x) \times x - (10x^2 + 14x + 70) \times 1 \\ &= -70 + 10x^2 \end{aligned}$$

Donc

$$S'(x) = \frac{-70 + 10x^2}{x^2}$$

6. Tableau de variations de S

- Valeur interdite : $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Signe de $-70 + 10x^2$: c'est un polynôme du 2e degré

$$\Delta = 2800 > 0$$

Il y a donc 2 racines

$$x_1 = -2.6457513110645907 \qquad x_2 = 2.6457513110645907$$

Et on sait que $-70 + 10x^2$ est du signe de a donc positif en dehors des racines
- Le dénominateur x^2 est toujours positif.
- Tableau de variations

x	0		-2.6457513110645907		10
$-70 + 10x^2$	$\|$	$-$	0	$+$	
x^2	$\|$	$+$		$+$	
S'	$\|$	$-$	0	$+$	
S	$\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

7. On a donc une surface minimal pour $x = 2.6457513110645907$ et $h = 18.52025917745213\,49$.

Exercice 2 climatisation

La climatisation d'un véhicule automobile est un système qui a une double fonction, refroidir ou réchauffer l'habitacle. Ce système fonctionne grâce à une certaine masse de gaz réfrigérant stocké dans un réservoir.

On suppose que, par défaut d'étanchéité, le système perd naturellement 0.099 gramme de gaz chaque jour.

Un automobiliste possède un véhicule pour lequel la masse de gaz dans le réservoir est initialement de 550 grammes.

Partie A

Le constructeur préconise de recharger le réservoir lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 grammes.

Au bout de combien de jours le constructeur préconise-t-il à l'automobiliste de recharger ce réservoir ?

Partie B

Lors d'une visite d'entretien, le garagiste signale à l'automobiliste que le système de climatisation de son véhicule présente une baisse significative de masse de gaz : en plus de la perte naturelle de 0.099 gramme, le système perd $3\,\%$ de sa masse chaque jour.

Le garagiste recharge alors complètement le réservoir.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse de gaz dans le réservoir au bout de n jours après cette visite.

On a donc, $u_0 = 550$ et on admet que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = 0.97u_n - 0.099.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Voici un algorithme qui, lorsque l'on saisit un nombre N non nul de jours écoulés, calcule et affiche la masse de gaz restant dans le système.

```
Variables
    N : un nombre entier naturel
    k : un nombre entier naturel
    u : un nombre réel
Entrée
    Saisir N
Initialisation
    u prend la valeur 660
Traitement
    Pour k allant de 1 à ...
        u prend la valeur ...
    Fin pour
Sortie
    Afficher u
```

   (a) Recopier et compléter la partie relative au **traitement** de cet algorithme.
   (b) Quelle masse de gaz restera-t-il au bout de 20 jours ? Arrondir au gramme près.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel par $v_n = u_n + 3.3$.
   (a) Calculer v_0.
   (b) On admet que (v_n) est une suite géométrique de raison 0.97.
   Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 553.3 \times 0.97^n - 3.3$.
   (d) À l'aide de cette expression, vérifier le résultat obtenu à la **question 2.b.**

4. Résoudre $550 \times 0.97^n - 3.3 < 440$ puis interpréter le résultat.

Solution 2

Partie A

- Quantité à perdre avant recharge
$$550 - 440 = 110$$
- À raison d'une perte de 0.099 par jour. Il faudra recharger dans
$$\frac{110}{0.099} = 1111 \text{ jours}$$

Partie B

1.

$$\begin{aligned} u_0 &= 550 \\ u_1 &= 0.97 \times u_0 - 0.099 = 533.401 \\ u_2 &= 0.97 \times u_1 - 0.099 = 517.29997 \end{aligned}$$

2.

Variables

N : un nombre entier naturel

k : un nombre entier naturel

u : un nombre réel

Entrée

Saisir N

Initialisation

u prend la valeur 660

Traitement

Pour k allant de 1 à N

u prend la valeur $0.97 * u - 0.099$

Fin pour

Sortie

Afficher u

3. Avec la calculatrice, on fait une table avec les valeurs de u
4. (a) $v_0 = u_0 + 3.3 = 550 + 3.3 = 553.3$
   (b) $v_n = 553.3 \times 0.97^n$
   (c) Comme $v_n = u_n + 3.3$ alors $u_n = v_n - 3.3$ et donc

$$u_n = 553.3 \times 0.97^n - 3.3$$

   (d) $u_{20} = 553.3 \times 0.97^{20} - 3.3 = 298$
5.

$$\begin{aligned} 550 \times 0.97^n - 3.3 &< 440 \\ 550 \times 0.97^n &< 440 + 3.3 \\ 0.97^n &< \frac{440 + 3.3}{550} \\ ln(0.97^n) &< ln\left(\frac{440 + 3.3}{550}\right) \\ n \times ln(0.97) &< ln\left(\frac{440 + 3.3}{550}\right) \\ n &> \frac{ln\left(\frac{440+3.3}{550}\right)}{ln 0.97} \end{aligned}$$

Il ne faut pas oublier d'inverser le sens de l'inégalité à la dernière étape car $ln(0.97)$ est négatif.
Le nombre trouvé est le nombre de jours qui vont passer avant de devoir recharger la climatisation.