Logarithme - annales

Terminale TESL – Mai 2020

Exercice 1 — Coût de fabrication

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A

Une entreprise produit chaque année entre 100 et 900 pneus pour tracteurs.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;9]$ par

$$f(x) = 0,5x^2 - 7x + 14 + 6\ln(x).$$

On admet que la fonction f modélise le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu, exprimé en centaines d'euros, pour x centaines de pneus produits.

1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\,;9]$ et on note f' sa fonction dérivée.

   Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;9]$ on a : $f'(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x}$.

2. (a) Justifier les variations suivantes de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;9]$:

x	1		6		9
Variations de $f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

   (b) Justifier que, sur l'intervalle $[1\,;9]$, l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α.

   (c) Donner un encadrement au centième près de α.

   (d) On considère l'algorithme ci-dessous :

$X \leftarrow 1$
$Y \leftarrow 7,5$
Tant que $Y > 5$
    $X \leftarrow X + 0,01$
    $Y \leftarrow 0,5X^2 - 7X + 14 + 6 * \ln(X)$
Fin Tantque

   À la fin de l'exécution de l'algorithme, quelle valeur numérique contient la variable X ?

3. Pour quelle quantité de pneus, le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu est-il minimal ? À combien s'élève-t-il ?

Partie B

Cette même entreprise envisage la fabrication de semoirs (gros matériel agricole). On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 100]$ par

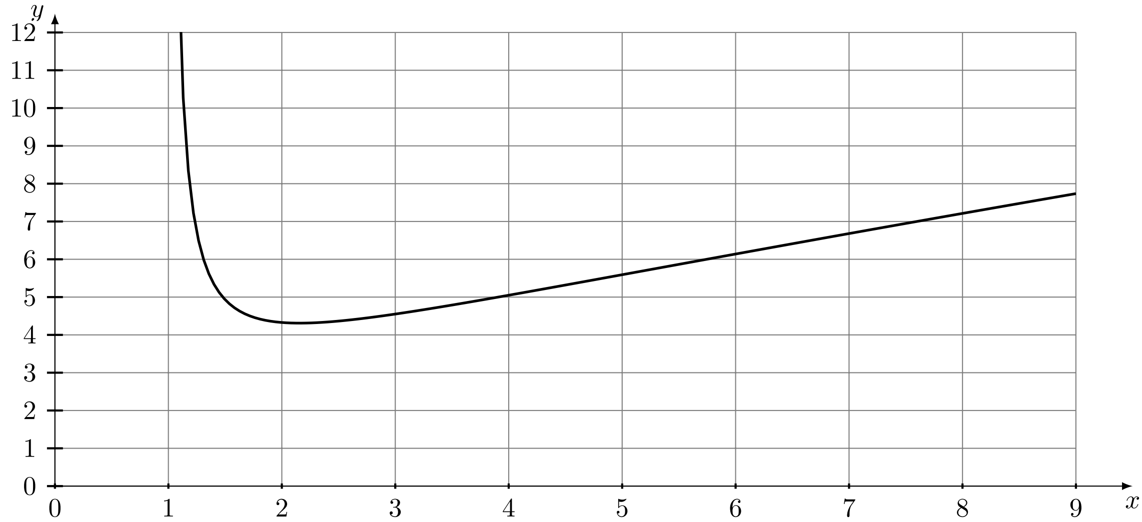
$$g(x) = 2x - 1 + \mathrm{e}^{0,05x}$$

modélise le coût de fabrication, exprimé en centaines d'euros, de x semoirs.

1. Donner une primitive G de la fonction g sur l'intervalle $[0; 100]$.
2. Calculer la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[0; 100]$.
3. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 — Étude de fonction

La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[1{,}1\,;8]$.



Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : étude graphique

1. Donner une valeur approchée du minimum de la fonction f sur l'intervalle [1,1 ; 8]
2. Quel est le signe de $f'(5)$? Justifier.
3. Encadrer l'intégrale $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,dx$ par deux entiers consécutifs.
4. La fonction f est-elle convexe sur [1,1 ; 3] ? Justifier.

Partie B : étude analytique

On admet que f est la fonction définie sur l'intervalle [1,1 ; 8] par

$$f(x) = \frac{2x-1}{\ln(x)}.$$

1. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle [1,1 ; 8], on a :

$$f'(x) = \frac{2\ln(x) - 2 + \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}$$

2. Soit h la fonction définie sur [1,1 ; 8] par : $h(x) = 2\ln(x) - 2 + \frac{1}{x}$.
   (a) Soit h' la fonction dérivée de h sur l'intervalle [1,1 ; 8].
   Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle [1,1 ; 8],

$$h'(x) = \frac{2x-1}{x^2}.$$

   (b) En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle [1,1 ; 8].
   (c) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle [1,1 ; 8]. Donner un encadrement de α par deux entiers consécutifs.
3. Déduire des résultats précédents le signe de $h(x)$ sur l'intervalle [1,1 ; 8].
4. À l'aide des questions précédentes, donner les variations de [sur [1,1 ; 8].

Exercice 3 — Loi de Benfort

Dans cet exercice, on considère le premier chiffre des entiers naturels non nuls, en écriture décimale. Par exemple, le premier chiffre de 2 017 est 2 et le premier chiffre de 95 est 9.

Dans certaines circonstances, le premier chiffre d'un nombre aléatoire non nul peut être modélisé par une variable aléatoire X telle que pour tout entier c compris entre 1 et 9,

$$P(X = c) = \frac{\ln(c+1) - \ln(c)}{\ln(10)}.$$

Cette loi est appelée loi de Benford.

1. Que vaut $P(X = 1)$?
2. On souhaite examiner si la loi de Benford est un modèle valide dans deux cas particuliers.

(a) **Premier cas**

Un fichier statistique de l'INSEE indique la population des communes en France au 1er janvier 2016 (champ : France métropolitaine et départements d'outre-mer de la Guadeloupe, de la Guyane, de la Martinique et de la Réunion).

À partir de ce fichier, on constate qu'il y a 36 677 communes habitées. Parmi elles, il y a 11 094 communes dont la population est un nombre qui commence par le chiffre 1.

Cette observation vous semble-t-elle compatible avec l'affirmation : « le premier chiffre de la population des communes en France au 1 er janvier 2016 suit la loi de Benford » ?

(b) **Deuxième cas**

Pour chaque candidat au baccalauréat de la session 2017, on considère sa taille en centimètres.

On désigne par X la variable aléatoire égale au premier chiffre de la taille en centimètres d'un candidat pris au hasard.

La loi de Benford vous semble-t-elle une loi adaptée pour X ?