Suites arithméticogéométriques

0.1 Définition

Une suite arithméticogéométrique est une suite qui mélange les caractéristiques d'une suite arithmétique (l'addition) et d'une géométrique (la multiplication). Elle est de la forme

$$u_{n+1} = a \times u_n + b \text{ avec } a \text{ et } b \text{ deux réels}$$

0.2 Remarques

- Vous avez construit des suites de ce type dans l'exercice sur le renouvellement des médecins.
- Aucune connaissance théorique sur les suites arithméticogéométriques n'est exigible en terminal ES-L. Par contre, on les retrouve presque toujours en les exercices du bac. Il a quelques manipulations à connaître.

0.3 Manipulations à connaître

Soit (u_n) une suite définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0.9u_n + 24 \\ u_0 = 60 \end{cases}$$

On reconnaît une suite arithméticogéométrique.

Pour l'étude de cette suite, on passera par une suite annexe (qui sera toujours donnée).

$$v_n = u_n - 240$$

On va alors chercher à démontrer que la suite (v_n) est géométrique

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} - 240}{u_n - 240} \\ &= \frac{0.9u_n + 24 - 240}{u_n - 240} \\ &= \frac{0.9u_n - 216}{u_n - 240} \\ &= \frac{0.9\left(u_n - 240\right)}{u_n - 240} \\ &= 0.9 \end{aligned}$$

Donc

$$v_{n+1} = 0.9v_n$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison q=0.9. Il reste donc à connaître le premier terme v_0

$$v_0 = u_0 - 240 = 60 - 240 = -180$$

On peut en déduit v_n en fonction de n

$$v_n = v_0 \times q^n = -180 \times 0.9^n$$

On en déduit donc u_n (ici je l'explique d'une autre façon que Aurélie mais les deux méthodes sont correctes).

$$v_n = u_n - 240$$

Donc

$$u_n = v_n + 240 = -180 \times 0.9^n + 240$$