Exercice 1 — Suite arithméticogéométrique

Soit (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier positif n, $u_{n+1} = 0.2u_n + 8$. On pose $v_n = u_n - 10$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0.2.
2. Calculer v_0 puis exprimer v_n en fonction de n.
3. En déduire, u_n en fonction de n.

Exercice 2 — Gaz à effet de serre - Liban 2017

Un plan de réduction des émissions de gaz à effet de serre (GES) a été mis en place dans une zone industrielle. On estime que, pour les entreprises déjà installées sur le site, les mesures de ce plan conduisent à une réduction des émissions de 2 % d'une année sur l'autre et que, chaque année, les implantations de nouvelles entreprises sur le site génèrent 200 tonnes de GES en équivalent CO_2.

En 2005, cette zone industrielle a émis 41 milliers de tonnes de CO_2 au total.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de milliers de tonnes de CO_2 émis dans cette zone industrielle au cours de l'année $2005 + n$.

1. Déterminer u_0 et u_1.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,98 \times u_n + 0,2$.
3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 10$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,98$. Préciser son premier terme.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 31 \times (0,98)^n + 10$.
4. (a) Calculer la limite de la suite (u_n).
   (b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. À l'aide de l'algorithme ci-dessous, on se propose de déterminer l'année à partir de laquelle la zone industrielle aura réduit au moins de moitié ses émissions de CO_2, par rapport à l'année 2005.
   (a) Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de l'algorithme
   (b) L'algorithme affiche 54. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```
1 u ← 41 ;
2 n ← 0 ;
3 tant que n ··· faire
4     u ← ··· ;
5     n ← n + 1 ;
6 fin
  Sorties : n
```

Solution 2

1. $u_0 = 41$. Puis on enlève 2 % à u_0 et on ajoute 200 tonnes soit 0,2 milliers de tonnes,
   soit $u_1 = 41 - 41 \times \dfrac{2}{100} + 0,2 = 0,98 \times 41 + 0,2 = 40,38$.
2. Pour calculer la quantité émise l'année $n+1$, on enlève 2 % (il restera donc 98 %) à la quantité émise lors de l'année n puis on ajoute 0,2 (200 tonnes en milliers de tonnes).
   Donc pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,98 \times u_n + 0,2$.
3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 10$.
   (a) Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} - 10}{u_n - 10} \\ &= \frac{0,98 \times u_n + 0,2 - 10}{u_n - 10} \\ &= \frac{0,98 \times u_n - 9,8}{u_n - 10} \\ &= \frac{0,98(u_n - 10)}{u_n - 10} \\ &= 0,98\end{aligned}$$

   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $0,98$. Son premier terme est $v_0 = u_0 - 10 = 31$.
   (b) Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 31 \times 0,98^n$.
   (c) Pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 10$ donc $u_n = v_n + 10 = 31 \times (0,98)^n + 10$.

$$u_n = 31 \times (0,98)^n + 10,\ n \in \mathbb{N}.$$

4. (a) Nous savons que $q \in]-1\,;\,1[$ donc la suite géométrique de raison q tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Donc la suite (v_n) a pour limite 0 en l'infini. La limite de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini est donc égale à 10.
   (b) Cela veut donc dire qu'au bout d'un très grand nombre d'année, les émissions de cette zone industrielle tendrons vers 10 milliers de tonnes, sans pouvoir descendre encore en dessous de cette limite.
5. (a) Recopier et compléter les lignes 7 et 9 de l'algorithme

```
1   Variables
2     U est du type nombre
3     n est du type nombre entier
4   Début Algorithme
5     U prend la valeur 41
6     n prend la valeur 0
7     Tant que U ⩾ 20,5 faire
8       Début Tant que
9       U prend la valeur 0,98 × U + 0,2
10      n prend la valeur n + 1
11      Fin Tant que
12    Afficher n
13  Fin Algorithme
```

   (b) L'algorithme affiche 54. Donc au bout de 54 années après 2005, et donc en 2059, les émissions de la zone industrielle auro

Exercice 3 — Tirage d'un journal - Metropole 2017

Dans cet exercice, on étudie le tirage moyen journalier des quotidiens français d'information générale et politique, c'est-à-dire le nombre moyen d'exemplaires imprimés par jour.

Le tableau suivant donne, entre 2007 et 2014, pour chaque année ce tirage moyen journalier, en milliers d'exemplaires :

Année	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Tirage moyen journalier en milliers d'exemplaires	10 982	10 596	10 274	10 197	10 182	9 793	9 321	8 854

Source : D.G.M.I.C (Direction générale des médias et des industries culturelles)

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis si nécessaire au centième.

1. Calculer le taux d'évolution du tirage moyen journalier entre 2007 et 2008.
   Pour tout entier naturel n, on note V_n le tirage moyen journalier, en milliers d'exemplaires, de l'année $(2007+n)$.
   On modélise la situation en posant : $V_0 = 10\,982$ et, pour tout entier naturel n,

$$V_{n+1} = 0,96V_n + 100.$$

2. Calculer V_1 puis V_2.
3. Soit (W_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $W_n = V_n - 2\,500$.
   (a) Montrer que (W_n) est une suite géométrique de raison $0,96$ puis déterminer son premier terme.
   (b) Déterminer l'expression de W_n en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n, $V_n = 8\,482 \times 0,96^n + 2\,500$.
4. (a) Déterminer le tirage moyen journalier prévu selon ce modèle pour l'année 2017.
   (b) Déterminer la limite de la suite (W_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
   (c) Proposer un algorithme affichant le tirage moyen journalier, à partir de 2007 jusqu'à l'année $(2007+n)$, pour un nombre d'années n saisi par l'utilisateur.

Solution 3

1. Le taux d'évolution du tirage moyen journalier entre 2007 et 2008 est $\dfrac{10\,596 - 10\,982}{10\,982} \times 100 \approx -3,51\,\%$.

   Pour tout entier naturel n, on note V_n le tirage moyen journalier, en milliers d'exemplaires, de l'année $(2007+n)$.
   Soit (V_n) la suite définie par $V_0 = 10\,982$ et, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = 0,96V_n + 100$.

2. $V_1 = 0,96V_0 + 100 = 0,96 \times 10\,982 + 100 = 10\,642{,}72$ et
   $V_2 = 0,96V_1 + 100 = 0,96 \times 10\,642{,}72 + 100 \approx 10\,317{,}01$

3. Soit (W_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $W_n = V_n - 2\,500$ donc
   $V_n = W_n + 2\,500$.

   (a)

$$\begin{aligned}
\frac{W_{n+1}}{W_n} &= \frac{V_{N+1} - 2500}{V_N - 2500} \\
&= \frac{0,96V_n + 100 - 2500}{V_n - 2500} \\
&= \frac{0,96V_n - 2400}{V_n - 2500} \\
&= \frac{0,96(V_2500)}{V_n - 2500} \\
&= 0,96
\end{aligned}$$

   $W_0 = V_0 - 2\,500 = 10\,982 - 2\,500 = 8\,482$
   Donc la suite (W_n) est géométrique de raison $q = 0,96$ et de premier terme $W_0 = 8\,482$.

   (b) On déduit de la question précédente que, pour tout n, $W_n = W_0 \times q^n = 8\,482 \times 0,96^n$.

   (c) Pour tout n, $V_n = W_n + 2\,500$ donc $V_n = 8\,482 \times 0,96^n + 2\,500$.

4. (a) L'année 2007 correspond à $n = 0$ donc l'année 2017 correspond à $n = 10$.
   Le tirage moyen journalier prévu selon ce modèle pour l'année 2017 est
   $V_{10} = 8\,482 \times 0,96^{10} + 2\,500 \approx 8\,139{,}11$ milliers d'exemplaires.

   (b) La suite (W_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,96$; or $-1 < q < 1$ donc la suite (W_n) admet le nombre 0 pour limite.
   On en déduit que la suite (V_n) a pour limite $2\,500$ ce qui veut dire que le nombre d'exemplaires vendus va tendre vers $2\,500$ milliers.

   (c) L'algorithme suivant affiche le tirage moyen journalier, à partir de 2007 jusqu'à l'année $(2007+n)$, pour un nombre d'années n saisi par l'utilisateur :

Variables
- V est un réel
- n et k sont des entiers

Initialisation
- Saisir la valeur de n
- V prend la valeur $10\,982$

Traitement et affichage
- Pour k variant de 1 à n
  - V prend la valeur $0,96 \times V + 100$
  - Afficher V
- Fin Pour