

DS 5

Terminale L-ES – 22 janvier 2020

Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.

Exercice 1

Tirelire(/9)

Maya possède 20 € dans sa tirelire au 1^{er} juin 2018.

À partir de cette date, chaque mois elle dépense un quart du contenu de sa tirelire puis y place 20 € supplémentaires.

Pour tout entier naturel n , on note u_n la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du n -ième mois. On a $u_0 = 20$.

- (a) Montrer que la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du 1^{er} mois est de 35 €.
(b) Calculer u_2 .
- On admet que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,75u_n + 20$.
On considère l'algorithme suivant :

```
U ← 20
N ← 0
Tant que U < 70
    U ← 0,75 × U + 20
    N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

- (a) Recopier et compléter le tableau ci-contre qui retrace les différentes étapes de l'exécution de l'algorithme. On ajoutera autant de colonnes que nécessaire à la suite de ce tableau. Arrondir les résultats au centième.

U	N	$U < 70$
20	0	Vrai
...

- (b) Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

- Pour tout entier n , on pose $v_n = u_n - 80$.
 - Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75.
 - Préciser son premier terme v_0 .
 - En déduire que, pour tout entier n , $u_n = 80 - 60 \times 0,75^n$.
 - Déterminer, au centime près, le montant que Maya possèdera dans sa tirelire au 1^{er} juin 2019.
 - Déterminer la limite de la suite (v_n) .
 - En déduire la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2

Satisfaction(/11)

On appelle fonction « satisfaction » toute fonction dérivable qui prend ses valeurs entre 0 et 100. Lorsque la fonction « satisfaction » atteint la valeur 100, on dit qu'il y a « saturation ».

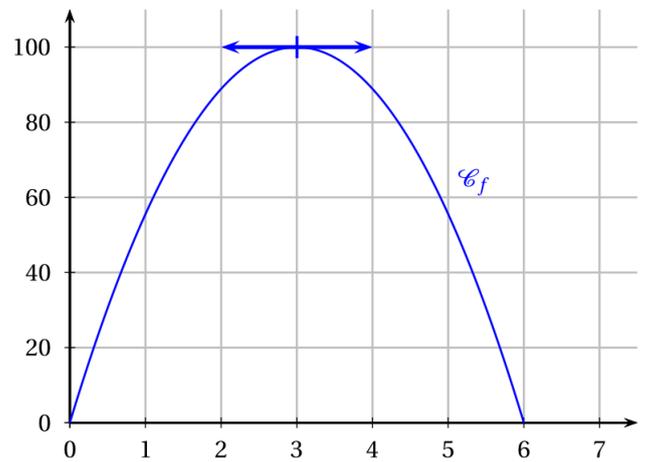
On définit aussi la fonction « envie » comme la fonction dérivée de la fonction « satisfaction ». On dira qu'il y a « souhait » lorsque la fonction « envie » est positive ou nulle et qu'il y a « rejet » lorsque la fonction « envie » est strictement négative.

Dans chaque partie, on teste un modèle de fonction « satisfaction » différent.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Un étudiant prépare un concours, pour lequel sa durée de travail varie entre 0 et 6 heures par jour. Il modélise sa satisfaction en fonction de son temps de travail quotidien par la fonction « satisfaction » f dont la courbe représentative est donnée ci-contre (x est exprimé en heures).



Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes.

1. Lire la durée de travail quotidien menant à « saturation ».
2. Déterminer à partir de quelle durée de travail il y a « rejet ».

Partie B

Le directeur d'une agence de trekking modélise la satisfaction de ses clients en fonction de la durée de leur séjour. On admet que la fonction « satisfaction » g est définie sur l'intervalle $[0; 30]$ par $g(x) = 12,5xe^{-0,125x+1}$ (x est exprimé en jour).

1. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0; 30]$,

$$g'(x) = (12,5 - 1,5625x)e^{-0,125x+1}.$$

2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0; 30]$ puis dresser le tableau des variations de g sur cet intervalle.
3. Quelle durée de séjour correspond-elle à l'effet « saturation » ?
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 50$ admet 2 solutions sur $[0; 30]$.

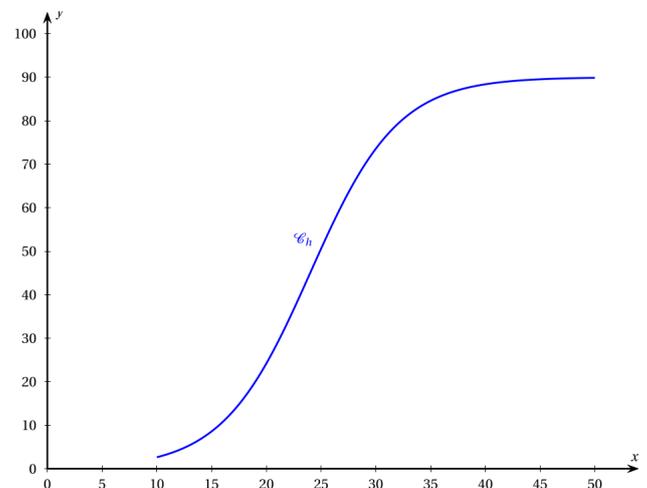
Partie C

La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction « satisfaction » h , est définie sur l'intervalle $[10; 50]$ par

$$h(x) = \frac{90}{1 + e^{-0,25x+6}}$$

(x est exprimé en millier d'euros).

La courbe C_h de la fonction h est représentée ci-contre.



Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	Dériver($90/(1 + \exp(-0.25 * x + 6))$) $\frac{22,5e^{-0,25x+6}}{(1 + e^{-0,25x+6})^2}$
2	Dériver($22.5 * \exp(-0,25 * x + 6)/(1 + \exp(-0,25 * x + 6))^2$) $\frac{5,625e^{-0,25x+6}(e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3}$

1. Donner sans justification une expression de $h''(x)$.
2. Expliquer que $h''(x)$ est du même signe que $e^{-0,25x+6} - 1$.
3. Démontrer que dans l'intervalle $[10; 50]$ l'inéquation $e^{-0,25x+6} - 1 > 0$ a pour solution $x < 24$.
4. Étudier la convexité de la fonction h sur l'intervalle $[10; 50]$.
5. À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « envie » décroît? Justifier.