Exercice 1 — Intégrale et aire

Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_1^6 5t dt$
2. $\displaystyle\int_{-10}^5 t dt$
3. $\displaystyle\int_{100}^{200} \frac{1}{2} t dt$
4. $\displaystyle\int_1^6 5dt$
5. $\displaystyle\int_3^{10} 1dx$
6. $\displaystyle\int_0^{110} 0,3x dx$

Exercice 2 — Calculer des aires

1. On veut calculer la quantité $\displaystyle\int_2^3 3x^2 - 12x + 14dx$.
   (a) Parmi les fonctions suivantes laquel est une primitive de $f(x) = 3x^2 - 12x + 14$?
   $$F(x) = 6x^3 + 4x^2 - 5x + 10 \qquad F(x) = -3x^3 + 4x^2 - 5x + 1 \qquad F(x) = x^3 - 6x^2 + 14x + 1$$
   (b) Calculer $\displaystyle\int_2^3 3x^2 - 12x + 14dx$
2. On veut calculer la quantité
   (a) Parmi les fonctions suivantes laquel est une primitive de $f(x) = 6x^2 + 4x - 5$?
   $$F(x) = x^6 + x^2 - 5x + 1 \qquad F(x) = 2x^3 + 2x^2 - 5x + 10 \qquad F(x) = 6x^3 + 4x^2 - 5x$$
   (b) Calculer $\displaystyle\int_1^{10} 6x^2 + 4x - 5dx$
3. On veut calculer la quantité $\displaystyle\int_1^{10} 12x^3 - x - 1dx$
   (a) Parmi les fonctions suivantes laquel est une primitive de $f(x) = 12x^3 - x - 1$?
   $$F(x) = 3x^4 - 0.5x^2 - x \qquad F(x) = x^4 - 2x^2 - x + 2 \qquad F(x) = \frac{12}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - x$$
   (b) Calculer $\displaystyle\int_1^{10} 12x^3 - x - 1dx$
4. On veut calculer la quantité $\displaystyle\int_{-1}^1 e^x + 10x + 1dx$
   (a) Parmi les fonctions suivantes laquel est une primitive de $f(x) = e^x + 10x + 1$?
   $$F(x) = e^x + 5x^2 - x + 1 \qquad F(x) = e^x + 5x^2 + x + 10 \qquad F(x) = e^x + 10x^2 - 2x \qquad F(x) = e^x + 5x^2 - x + 5$$
   (b) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^1 e^x + 10x + 1dx$

Exercice 3 — Calculs de primitives

Calculer les primitives des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 9x^2 - 2x + 2$
2. $f(x) = 2 + 5x - 15x^2$
3. $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + 1$
4. $f(x) = (2x + 1)^2$
5. $f(x) = e^x + 5e^x + 1$
6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 4$
7. (*) $f(x) = \dfrac{3}{x^2} - x$
8. (*) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 1}{x}$

Exercice 4 — Calculs de primitives - exponentielle

Calculer les primitives des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 2e^{2x+1}$
2. $f(x) = 0.1e^{0.1x-19}$
3. $f(x) = 6e^{2x+1}$
4. $f(x) = (2x+1)e^{x^2+x+2}$
5. (*) $f(x) = 2e^{0.5x+1} - e^{-0.5x+2}$
6. (*) $f(x) = (x-2)e^{x^2-4x}$

Exercice 5 — Calculer une intégrale

On souhaite calculer plusieurs intégrales de la fonction $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$

1. Calculer un primitive de f.
2. Représenter graphiquement les quantités suivantes puis les calcules.

$$\int_1^2 f(x)\,dx \qquad \int_2^3 f(x)\,dx$$

3. Représenter graphiquement la quantité $\int_1^3 f(x)\,dx$ et déduire sa valeur à partir de la questions précédente
4. (*) Quelle formule peut-on conjecturer des deux questions précédentes ? (si vous êtes pas trompé, cette formule s'appelle la relation de Chasles).

Exercice 6 — Calculs d'intégrales

Calculer les valeurs suivantes

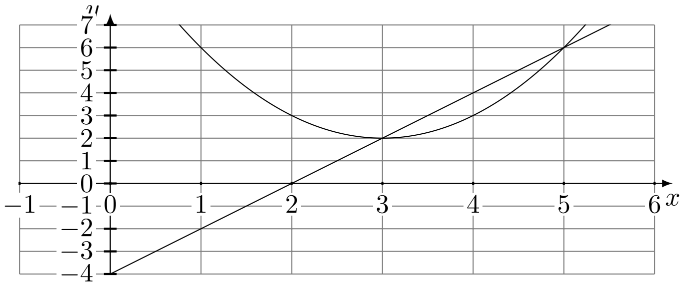
1. $A = \int_1^2 9x^2 - 2x + 2\,dx$
2. $B = \int_3^4 5x^3 + 2x^2 + 1\,dx$
3. $C = \int_0^{10} (2x+1)^2\,dx$
4. (*) $D = \int_0^{10} 0.5e^{0.5x+1}\,dx$

Exercice 7 — Propriétés de l'intégrales

Dans cet exercice, le calcul de plusieurs intégrales devrait vous permettre d'intuiter les propriétés de l'intégrale (du même type de la relation de Chasles dans le premier exercice).

Pour cela, on va s'intéresser aux deux fonctions suivantes (représentée ci-contre)

$$f(x) = 2x - 4 \qquad g(x) = x^2 - 6x + 11$$



1. Influence du signe de la fonction
   (a) Calculer les quantités suivantes

$$\int_1^2 f(x)\,dx \qquad \int_3^4 g(x)\,dx$$

   (b) Quel est le signe de $f(x)$ sur $[1\,;2]$ puis sur $[3\,;4]$?
   (c) Que peut-on conjecturer sur le lien entre le signe de la fonction et le signe de l'intégrale ?
2. Croissance de l'intégrale Pour les questions qui suivent on définira

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

   (a) Étudier le signe de $h(x)$ et en déduire l'intervalle sur lequel on a $f(x) \geq h(x)$.
   (b) Calculer les quantités suivantes

$$\int_3^5 h(x)\,dx$$

   (c) En déduire, la comparaison des quantités suivantes

$$\int_3^5 f(x)\,dx \qquad \int_3^5 g(x)\,dx$$

(d) Que peut-on conjecturer de la questions (a) et (c) ?

3. Aire entre deux courbes.

   (a) Représenter sur le graphique la quantité

$$\int_3^5 f(x)\ dx - \int_3^5 g(x)\ dx$$

   (b) En déduire, une méthode pour calculer l'aire contenue entre 2 courbes.

Exercice 8 — Encore d'actualité

Dans un précédent exercice, on avait étudié le nombre de personnes infecté au Covid-19 en France. Les quantités qui suivent sont tirés de cet exercice et grossièrement arrondis.

Dans l'exercice présent, nous allons étudier le nombre de nouveaux cas à partir du premier mars suivant deux modèles : un discret (avec une suite) et un continu (avec un fonction).

1. **Modèle discret** : Le nombre de nouveaux cas quotidiens est modélisé par une suite géométrique (u_n) de premier terme 26 et de raison 1,22. n désigne le nombre de jour après le premier mars.
   (a) Exprimer u_n en fonction de n.
   (b) Combien de nouveau cas peut-on compter au 5mars (u_4) ? Au 10 mars ?
   (c) Tracer la représentation graphique de u_n pour n allant de 0 à 10 (l'axe des abscisses ira de 0 à 200).
   (d) Combien de nouveau cas peut-on compter entre le premier mars et le 10 mars (compris) ?
   (e) Interpréter ce résultat en terme d'aire sur le graphique.
   (f) Quelle a été la moyenne du nombre de nouveaux cas entre le premier et le 10 mars ?
2. **Modèle continue** : Le nombre de nouveaux cas quotidiens est modélisé par la fonction suivante (obtenu par prolongement continue le la suite (u_n))
$$f(x) = 26e^{0.2x}$$
   (a) Tracer la représentation graphique de la fonction $f(x)$.
   (b) Représenter graphiquement le nombre de cas total entre le premier et le 10 mars (compris).
   (c) Calculer cette quantité.
   (d) Quelle a été la moyenne du nombre de nouveaux cas entre le premier et le 10 mars ?
3. (*) Proposer une façon de calculer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle.

Exercice 9 — valeur moyenne

Calculer la valeur moyenne des fonctions ci-dessous suivant l'intervalle considéré

1. $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$ sur $I = [2\,;3]$
2. $g(x) = 4x^3 - 2x^2 + 1$ sur $I = [0\,;10]$
3. $h(x) = (2x-1)^2$ sur $I = [0\,;0.5]$
4. $i(x) = 0,5e^{-0,5x}$ sur $I = [0\,;10]$