Produit scalaire

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.
Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$ est le nombre réel tel que

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\theta)$$

où θ est la mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Produit scalaire

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.
Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$ est le nombre réel tel que

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\theta)$$

où θ est la mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Calculs de produits scalaires

Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$

1. $||\overrightarrow{u}|| = 2$, $||\overrightarrow{v}|| = 2$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \dfrac{\pi}{3}$
2. $||\overrightarrow{u}|| = 5$, $||\overrightarrow{v}|| = 1$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \dfrac{2\pi}{3}$

Retrouver l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

1. $||\overrightarrow{u}|| = 2$, $||\overrightarrow{v}|| = 2$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 2$
2. $||\overrightarrow{u}|| = 3$, $||\overrightarrow{v}|| = 2$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 3\sqrt{2}$

Cas particuliers

1. Comment sont $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ quand $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$?
2. Comment sont $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ quand $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$?

Propriétés

Cas particuliers

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ ssi $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$ ssi $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires dans la même direction
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$ ssi $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires dans la direction opposée

Une autre façon de calculer

Propriété

Soit $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$ deux vecteurs non nuls dans un repère orthonormés alors

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x \times x' + y \times y'$$

Une autre façon de calculer

Propriété

Soit $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$ deux vecteurs non nuls dans un repère orthonormés alors

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = x \times x' + y \times y'$$

Utilisation

Calculer un angle entre 2 vecteur à partir des coordonnées.

Calculs de produits scalaires

Calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ puis $\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

1. $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

L'angle $\widehat{BAC}$

1. avec $A(1;2)$, $B(3;-4)$, $C(1;-1)$
2. avec $A(4;1)$, $B(-1;1)$, $C(1;5)$

Quelle est la nature du triangle ABC ?

Avec $A(-1;2)$, $B(0;5)$ et $C(2;1)$