

## Exercice 1

## Coût de fabrication

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

### Partie A

Une entreprise produit chaque année entre 100 et 900 pneus pour tracteurs. On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[1; 9]$  par

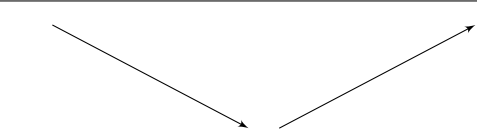
$$f(x) = 0,5x^2 - 7x + 14 + 6 \ln(x).$$

On admet que la fonction  $f$  modélise le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu, exprimé en centaines d'euros, pour  $x$  centaines de pneus produits.

1. La fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[1; 9]$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée.

Démontrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[1; 9]$  on a :  $f'(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x}$ .

2. (a) Justifier les variations suivantes de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1; 9]$  :

$x$	1	6	9
Variations de $f(x)$			

- (b) Justifier que, sur l'intervalle  $[1; 9]$ , l'équation  $f(x) = 5$  admet une unique solution  $\alpha$ .

- (c) Donner un encadrement au centième près de  $\alpha$ .

- (d) On considère l'algorithme ci-dessous :

```
X ← 1
Y ← 7,5
Tant que Y > 5
    X ← X + 0,01
    Y ← 0,5X2 - 7X + 14 + 6 * ln(X)
Fin Tantque
```

À la fin de l'exécution de l'algorithme, quelle valeur numérique contient la variable  $X$  ?

3. Pour quelle quantité de pneus, le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu est-il minimal ? À combien s'élève-t-il ?

### Partie B

Cette même entreprise envisage la fabrication de semoirs (gros matériel agricole). On admet que la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[0; 100]$  par

$$g(x) = 2x - 1 + e^{0,05x}$$

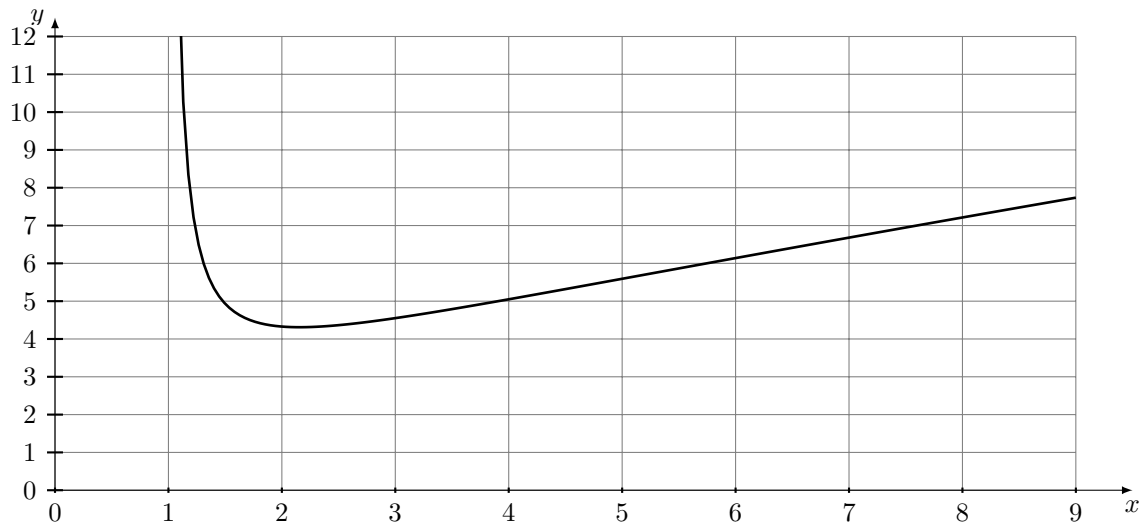
modélise le coût de fabrication, exprimé en centaines d'euros, de  $x$  semoirs.

- Donner une primitive  $G$  de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0; 100]$ .
- Calculer la valeur moyenne de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0; 100]$ .
- Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

## Exercice 2

## Étude de fonction

La courbe  $C_f$  ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie et deux fois dérivable sur l'intervalle  $[1,1; 8]$ .



Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

### Partie A : étude graphique

1. Donner une valeur approchée du minimum de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1, 8]$
2. Quel est le signe de  $f'(5)$ ? Justifier.
3. Encadrer l'intégrale  $\int_2^4 f(x) dx$  par deux entiers consécutifs.
4. La fonction  $f$  est-elle convexe sur  $[1, 3]$ ? Justifier.

### Partie B : étude analytique

On admet que  $f$  est la fonction définie sur l'intervalle  $[1, 8]$  par

$$f(x) = \frac{2x - 1}{\ln(x)}.$$

1. Montrer que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[1, 8]$ , on a :

$$f'(x) = \frac{2 \ln(x) - 2 + \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}$$

2. Soit  $h$  la fonction définie sur  $[1, 8]$  par :  $h(x) = 2 \ln(x) - 2 + \frac{1}{x}$ .

(a) Soit  $h'$  la fonction dérivée de  $h$  sur l'intervalle  $[1, 8]$ .

Montrer que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[1, 8]$ ,

$$h'(x) = \frac{2x - 1}{x^2}.$$

- (b) En déduire les variations de la fonction  $h$  sur l'intervalle  $[1, 8]$ .
  - (c) Montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $[1, 8]$ . Donner un encadrement de  $\alpha$  par deux entiers consécutifs.
3. Déduire des résultats précédents le signe de  $h(x)$  sur l'intervalle  $[1, 8]$ .
  4. À l'aide des questions précédentes, donner les variations de  $f$  sur  $[1, 8]$ .

### Exercice 3

### Loi de Benford

Dans cet exercice, on considère le premier chiffre des entiers naturels non nuls, en écriture décimale. Par exemple, le premier chiffre de 2017 est 2 et le premier chiffre de 95 est 9.

Dans certaines circonstances, le premier chiffre d'un nombre aléatoire non nul peut être modélisé par une variable aléatoire  $X$  telle que pour tout entier  $c$  compris entre 1 et 9,

$$P(X = c) = \frac{\ln(c + 1) - \ln(c)}{\ln(10)}.$$

Cette loi est appelée loi de Benford.

1. Que vaut  $P(X = 1)$ ?
2. On souhaite examiner si la loi de Benford est un modèle valide dans deux cas particuliers.

(a) **Premier cas**

Un fichier statistique de l'INSEE indique la population des communes en France au 1<sup>er</sup> janvier 2016 (champ : France métropolitaine et départements d'outre-mer de la Guadeloupe, de la Guyane, de la Martinique et de la Réunion).

À partir de ce fichier, on constate qu'il y a 36 677 communes habitées. Parmi elles, il y a 11 094 communes dont la population est un nombre qui commence par le chiffre 1.

Cette observation vous semble-t-elle compatible avec l'affirmation : « le premier chiffre de la population des communes en France au 1<sup>er</sup> janvier 2016 suit la loi de Benford » ?

(b) **Deuxième cas**

Pour chaque candidat au baccalauréat de la session 2017, on considère sa taille en centimètres.

On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au premier chiffre de la taille en centimètres d'un candidat pris au hasard.

La loi de Benford vous semble-t-elle une loi adaptée pour  $X$  ?