DS 6

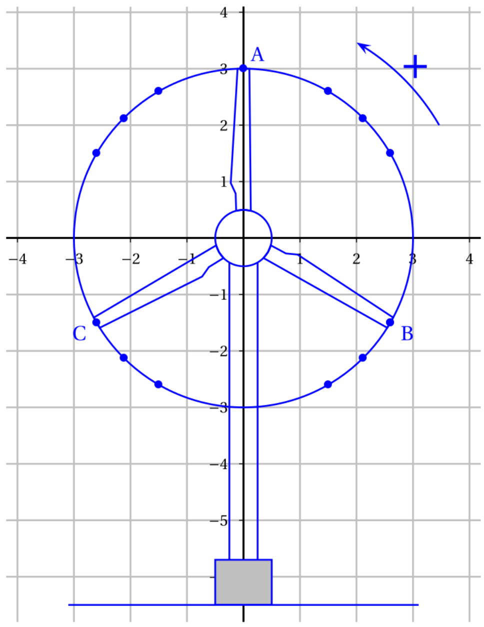
Terminale STI2D – 13 février 2020

Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.

Une part importante de la note sera dédiée à la rédaction, aux explications et à l'utilisation des notations mathématiques.

Exercice 1 — Éolienne(/7)

Dans le plan complexe muni d'une repère orthonormé direct $(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$, on représente les extrémités des pales d'une éolienne par le point A de coordonnées $(0\,;\,3)$ et par les points B et C d'affixes respectives :
$z_{\text{B}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$ et $z_{\text{C}} = 3\,\mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{6}}$.



1. Soit z_{A} l'affixe du point A.
   (a) Donner la forme algébrique de z_{A}.
   (b) Donner la forme exponentielle de z_{A}.
2. Déterminer la forme exponentielle de z_{B}.
3. On admet que lorsque l'hélice tourne d'un angle de $\dfrac{\pi}{2}$ radians dans le sens direct, les points A, B et C sont transformés respectivement en A′, B′ et C′ tels que :
   - A′ a pour affixe $z_{\text{A}'} = z_{\text{A}} \times \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$
   - B′ a pour affixe $z_{\text{B}'} = z_{\text{B}} \times \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$
   - C′ a pour affixe $z_{\text{C}'} = z_{\text{C}} \times \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$

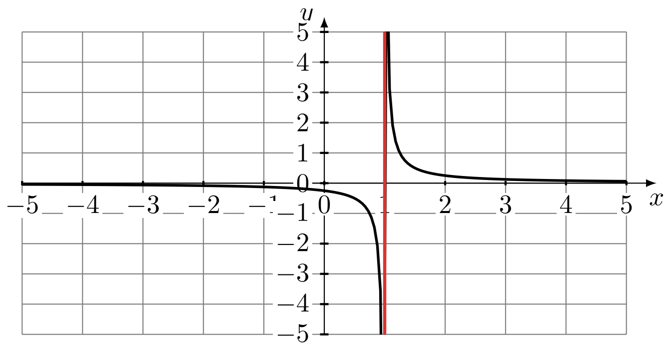
   Déterminer la forme exponentielle de $z_{\text{C}'}$;
4. Les questions suivantes sont à justifier avec des résultats numériques et non un raisonnement graphique.
   (a) Quelle est la nature du triangle AOB ?
   (b) Calculer l'angle $\widehat{AOB}$.

Exercice 2 — QCM(/6)

Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse est correcte.
Recopier sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte $0,5$ *point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.*

1. On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur $]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;+\infty[$.

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$
   (b) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty$
   (c) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = -\infty$
   (d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$



2. L'équation $\ln(x-2) = -2$ admet pour solution dans $\mathbb{R}$

   (a) 0 | (b) $2+\mathrm{e}^{-2}$ | (c) 2.14 | (d) $2-\mathrm{e}^{2}$

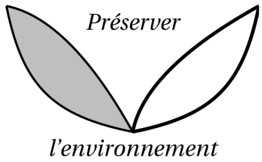
3. On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$. La primitive F de f sur $]0\,;+\infty[$ telle que $F(1) = 3$ est donnée par :

   (a) $F(x) = x\ln(x) - 2x + 5$
   (b) $F(x) = x\ln(x) + 3$
   (c) $F(x) = \frac{3}{x}$
   (d) $F(x) = x\ln(x) - x + 4$

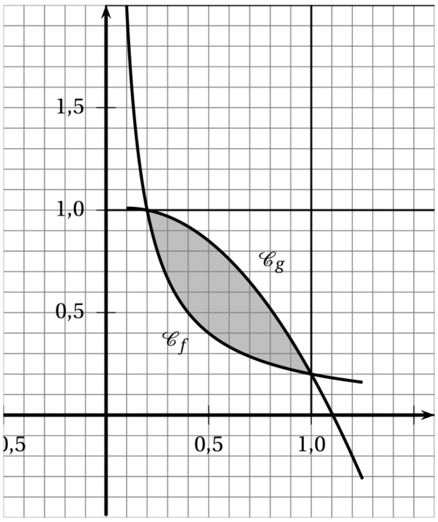
4. On considère le nombre complexe $z = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$. Le nombre z^2 est
   (a) Un nombre réel
   (b) Un nombre complexe de partie réelle nulle
   (c) Un nombre complexe de module 1
   (d) Une nombre complexe de partie imaginaire positive

Exercice 3 Logo(/7)

Le logo utilisé par le conservatoire pour la communication est constitué de deux feuilles symétriques l'une de l'autre, dessinées ci-contre.



Soient les fonctions f et g définies sur l'intervalle [0,1 ; 1,25] par $f(x) = \dfrac{0,2}{x}$ et $g(x) = -x^2 + 0,2x + 1$.
On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de ces fonctions tracées dans le repère orthonormé ci- dessous.
On admet que ces deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en deux points.



La feuille gauche du logo correspond à la partie grisée du plan, délimitée par ces deux courbes.

1. Vérifier par le calcul que $0,2$ est une solution de l'équation $f(x) = g(x)$.
2. Déterminer graphiquement la seconde solution de cette équation.
3. (a) Interpréter graphiquement l'intégrale $I = \displaystyle\int_{0,2}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x$.
   (b) Donner une valeur approchée de cette intégrale à 10^{-2} près.
4. (a) Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle [0,1 ; 1,25] par $F(x) = \dfrac{1}{5}\ln(x)$ est une primitive sur l'intervalle [0,1 ; 1,25] de la fonction f.
   (b) Calculer la valeur exacte de $J = \displaystyle\int_{0,2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche (schéma, calculs, explications...) même incomplète sera valorisée*
   On admet que la courbe $\mathcal{C}_g$ est située au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle [0,2 ; 1].
   L'unité choisie sur chacun des axes est de 2,5 cm.
   En déduire, au cm^2 près, une valeur approchée de l'aire totale du logo.