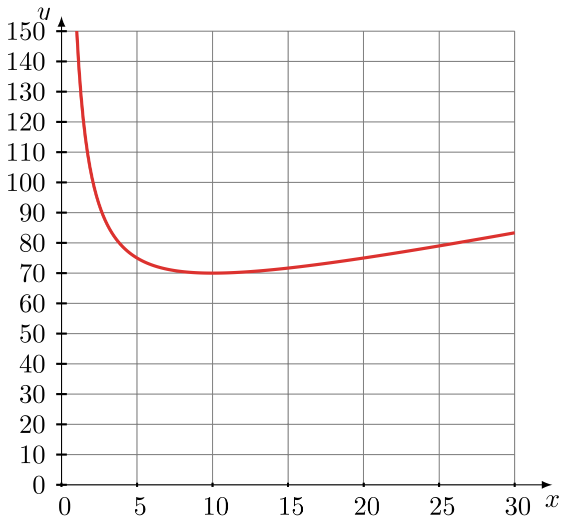
Exercice 1 — Histoire de coûts

> **Définition**
> Le **coût moyen unitaire** quand on fabrique q unité est $C_m(q) = \frac{C(q)}{q}$ où $C(q)$ est le coût total pour produire q unités.

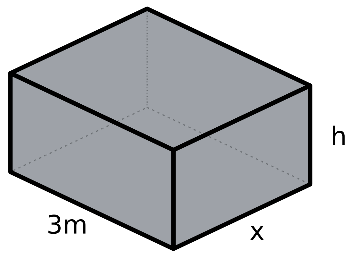
Une entreprise fabrique chaque jour entre 0 et $30m^3$ de produit chimique.



1. Soit C la fonction qui modélise ses coûts de fabrication. Elle est définie sur l'intervalle $[0\,;30]$ par $C(x) = x^2 + 50x + 100$ et exprimée en euros.
   (a) Calculer le coût de production total pour $10m^3$.
   (b) Calculer le coût moyen unitaire pour $10m^3$.
2. On définit la fonction f qui modélise le coût moyen unitaire en fonction de la quantité x par la fonction $f(x) = \frac{C(x)}{x}$ sur l'intervalle $[1\,;30]$. On a représenté cette fonction ci-contre.
   (a) Déterminer graphiquement une valeur approchée de $f(5)$ puis de $f(25)$.
   (b) Déterminer graphiquement quelles quantité doivent être produite pour avoir un coût unitaire moyen inférieur à 80.
3. (a) Démontrer que $f(x) = x + 50 + \frac{100}{x}$..
   (b) Dériver la fonction f puis démontrer que l'on a
   $$f'(x) = \frac{(x-10)(x+10)}{x^2}$$
   (c) Étudier le signe de $f'(x)$ puis en déduire les variations de $f(x)$.
   (d) Déterminer la quantité à produire pour que le coût moyen de production soit minimal.

Exercice 2 — Optimisation de matière première

On se propose de fabriquer avec le moins de tôle possible une citerne fermée en forme de parallélépipède rectangle dont le volume intérieur doit être de $12m^3$. La longueur est aussi fixée à $3m$ par le cahier des charges. On peut donc faire varier uniquement la largeur (notée x) et la hauteur (notée h) de la cuve.



1. Expliquer pourquoi quand la largeur x change, la hauteur h doit elle aussi changer pour respecter les contraintes.
2. Démontrer que l'on doit avoir $h = \dfrac{4}{x}$.
3. On note $S(x)$ l'aire totale de la citerne (c'est à dire la somme des aires des six faces). Montrer que l'on peut écrire
   $$S(x) = 6x + 8 + \frac{24}{x}$$
4. Démontrer que
   $$S'(x) = \frac{6(x-2)(x+2)}{x^2}$$
5. En déduire le tableau de variation de $S(x)$ sur $]0\,;10]$.
6. Déterminer les valeurs de x et h correspondant à une utilisation minimal de tôle.