

1 La fonction exponentielle

Relation fonctionnelle

Définition

Nomme e le nombre d'Euler e qui vaut environ $e \approx 2,718\,281\,828\,459$.

La fonction **exponentielle** est la fonction puissance de base e

$$\exp : x \mapsto e^x$$

Cette fonction est définie sur \mathbb{R} .

Propriété

La fonction exponentielle partage les propriétés suivantes avec toutes les fonctions puissances

- Valeur particulières

$$\exp(0) = e^0 = 1 \qquad \exp(1) = e^1 = e$$

- Relations fonctionnelles

Soit x et y 2 nombres réels

$$e^x \times e^y = e^{x+y} \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \qquad (e^x)^y = e^{x \times y}$$

- Simplification des égalités

Soit x et y 2 nombres réels alors

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

Exemples

- Simplification des expressions

$$\frac{e^2 \times e^3}{e^e} = \qquad (e^{35})^3 =$$

- Réduction d'expressions

$$(1 + e^x)(1 - e^x) =$$

- Factorisation

$$3e^x + (2x - 1)e^x =$$

- Équations

$$e^{3x+1} = e^{2x-3}$$

À faire au crayon à papier : compléter les exemples

1.1 Dérivée

Propriété Dérivée de \exp

La dérivée de la fonction exponentielle est elle-même. On a ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp'(x) = \exp(x)$$

En particulier c'est LA fonction puissance qui vérifie $f'(0) = 1$.

Exemple de calcul Calcul de la dérivée de $f(x) = (2x + 1)e^x$

À faire au crayon à papier :

Remarque : On peut définir l'exponentielle comme la fonction qui vérifie $f'(x) = f(x)$ (on appelle ce genre de relation une équation différentielle).

On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(x) > 0$ alors la fonction exponentielle est

Propriété

Soit x et y deux nombres réels alors

$$e^x \leq e^y \Leftrightarrow x \leq y$$

Résolution d'inéquation Résoudre l'inéquation

$$e^{-3x+2} - 1 \geq 0$$

Étude de la fonction

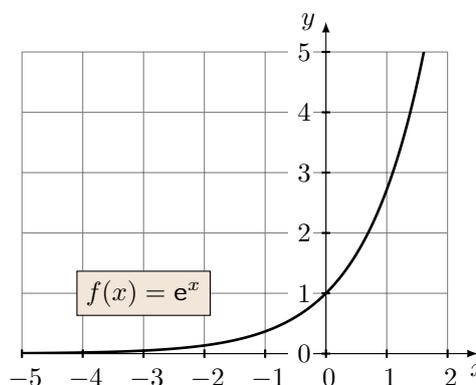
Propriété

- Elle est continue et dérivable sur \mathbb{R}
- Elle est strictement positive sur \mathbb{R}
($\forall x \in \mathbb{R} e^x > 0$)

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp(x) = e^x$		

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \dots$$



Dérivée de fonctions composées avec l'exponentielle

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Alors la fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est aussi dérivable sur I et sa dérivée est

$$f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$$

Exemple

Calcul de la dérivée de $f(x) = e^{-0.1x}$

À faire au crayon à papier :

Calcul de la dérivée de $f(x) = (2x + 1)e^{-0.1x}$

À faire au crayon à papier :