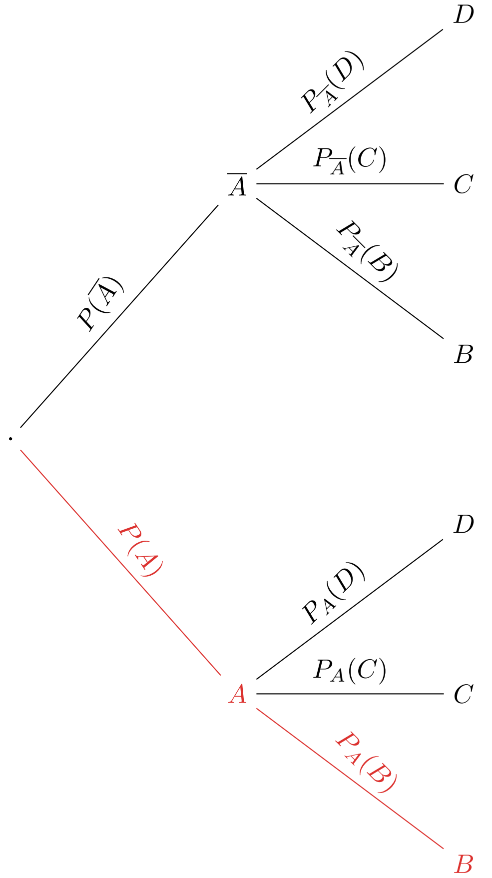
Probabilités conditionnelles - Cours

– Mars 2021

2 Arbre et probabilité conditionnelles

Les probabilités conditionnelles peuvent se représenter sous forme d'arbre de probabilité.

Soit A deux évènements de E avec $P(A) \neq 0$ et B, C et D trois autres évènements de E. Alors on peut considérer l'arbre de probabilité ci-contre et on obtient les propriétés suivantes :



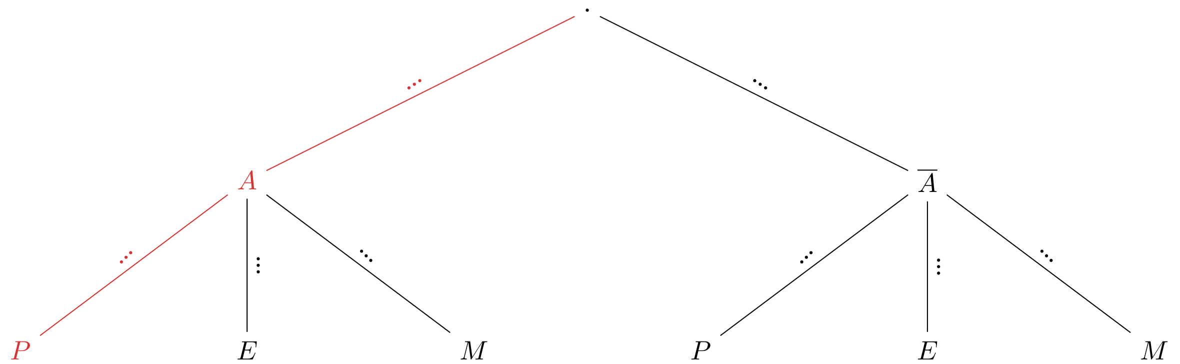
- La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est égale à 1.
  On a alors
  $$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$
  ou encore
  $$P_A(B) + P_A(C) + P_A(D) = 1$$
- La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches parcourues.
  On a alors (chemin rouge)
  $$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$
  Ou encore la formule de Bayes
  $$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$
- La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des chemins qui conduisent à cet évènement.
  C'est la loi des probabilités totale qui peut se traduire dans notre exemple par
  $$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$
  ou
  $$P(C) = P(A \cap C) + P(\overline{A} \cap C)$$

Exemple

	Moins de 20ans	entre 20 et 50 ans	Plus de 50ans	Total
Guéris	20	16	30	66
Malade	24	10	5	39
Total	44	26	35	105

On note

$$A = \{\text{Malade}\} \qquad P = \{\text{Plus de 50ans}\} \qquad E = \{\text{Entre 20 et 50ans }\} \qquad M = \{\text{Moins de 20ans}\}$$



À faire au crayon à papier : Compléter l'arbre avec les probabilités