DS 7

Terminale STI2D – 18 mars 2021

Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être modifié.

Exercice 1 — Automatismes(/10)

Dans cet exercices toutes les questions sont indépendantes et peuvent être traitées séparément. Chaque réponse doit être expliquée et les calculs détaillés.

1. Soit $z = -1 - \sqrt{3}i$. Déterminer la forme exponentielle de z.
2. Soit $z = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$. Déterminer la forme algébrique de z.
3. Soient $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$, calculer $z_1 \times z_2$.
4. Résoudre l'équation différentielle
$$\frac{df}{dx} = 2x$$
5. Résoudre l'équation différentielle
$$y' = 0.1y$$
6. Soit $f(t) = Ke^{-0.1t} + 1$. On sait que $f(10) = 100$. Déterminer la valeur de K.
7. Soit $f(x) = (3x - 1)e^{-0.1x}$. Tracer le tableau de signe de $f(t)$ pour t allant de $-\infty$ à $+\infty$.
8. Démontrer que
$$F(x) = (x^2 + x)e^{2x} + 100$$
est une primitive de
$$f(x) = (2x^2 + 4x + 1)e^{2x}$$

Exercice 2 — Frottements(/10)

En raison des frottements avec l'atmosphère résiduelle terrestre, les satellites en orbite basse perdent progressivement de l'altitude et finissent par se consumer dans les couches les plus denses de l'atmosphère. Cet évènement est appelé rentrée atmosphérique.

Le temps, exprimé en jour, avant la rentrée atmosphérique dépend des caractéristiques du satellite et de l'altitude h, exprimée en kilomètre, de son orbite.

Pour un satellite donné, ce temps est modélisé par une fonction T de la variable h, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

PARTIE A – Étude d'un premier satellite

On admet que la fonction T, associée à ce premier satellite, est une solution de l'équation différentielle (E) suivante dans laquelle y désigne une fonction de la variable h définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et y' la fonction dérivée de y.

$$(E)\ :\ 40y' - y = 0$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer la fonction T solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition $T(800) = 2\,000$.

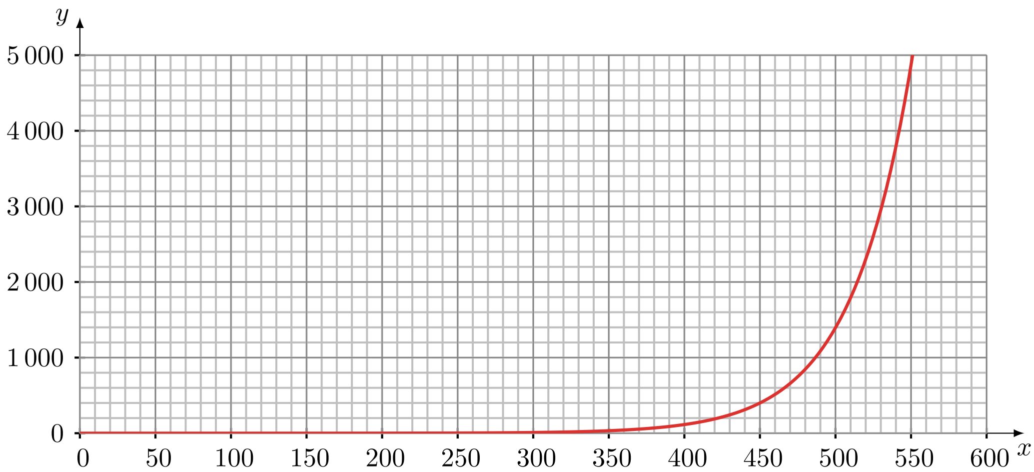
PARTIE B – Étude d'un deuxième satellite

Dans cette partie, on admet que la fonction T, associée à ce deuxième satellite, est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$T(h) = K \times 0,012\,\mathrm{e}^{\,0,025(h-150)}.$$

Le nombre réel K est appelé coefficient balistique du satellite.
La fonction T associée à ce deuxième satellite est représentée ci-après.

Dans cette partie, on ne demande pas de justification. Les résultats seront donnés avec la précision permise par le graphique.



3. À quelle altitude minimale faut-il mettre en orbite ce deuxième satellite pour que le temps restant avant sa rentrée atmosphérique soit au moins égal à 1 000 jours ?
4. Déterminer une valeur approchée du coefficient balistique K de ce deuxième satellite.

PARTIE C – Étude d'un troisième satellite : Hubble

Le satellite Hubble a un coefficient balistique K égal à 11.
La fonction T, associée à ce troisième satellite, est donc définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$T(h) = 0,132\,\mathrm{e}^{\,0,025(h-150)}.$$

5. L'orbite du satellite Hubble est située à l'altitude h de 575 km. Calculer le temps $T(h)$ restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble. Arrondir au jour près.
6. (a) Déterminer $T'(h)$, où T' désigne la fonction dérivée de T.
   (b) En déduire le sens de variations de la fonction T sur $[0\,;\,+\infty[$.